Л.6 Многофотонное вынужденное тормозное излучение (МВТИ)

Рассеяние электрона на потенциальном центре в присутствие электромагнитного поля описывается нестационарным уравнением Шредингера:

$$\begin{cases} i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[\frac{\left(\hat{\vec{p}}-\frac{e}{c}\vec{A}(t)\right)^2}{2m} + U(r)\right]\psi, \\ \psi_i = A_0 e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}_i\cdot\vec{r}} \end{cases}, \tag{56}$$

где $\hat{\vec{p}}$ - оператор импульса, а $\vec{A}(t) = -\frac{c}{\omega}\vec{\varepsilon}_0\sin(\omega t)$ - вектор-потенциал электромагнитного поля, независящий от пространственных координат в дипольном приближении, а $U(r)$ потенциальная энергия взаимодействия электрона с центром, на котором происходит рассеяние. Будем искать решение в виде разложения по волковским функциям (47):

$$\psi(\vec{r},t) = \int d\vec{p}C_{\mathrm{p}}(t)\varphi_{\mathrm{p}}^V(\vec{r},t). \tag{57}$$

Подставляя в исходное уравнение, умножая на комплексно сопряженную ВФ невозмущенного базиса и интегрируя по всему пространству, получим бесконечную систему уравнений:

$$i\hbar\dot{C}_{\mathrm{p}_f}(t) = \int d\vec{p}\langle\varphi_{\mathrm{p}_f}|U|\varphi_{\mathrm{p}}\rangle C_{\mathrm{p}}(t)\varphi_{\mathrm{p}}e^{\frac{i}{\hbar}\left[(E_{\mathrm{p}_f}-E_{\mathrm{p}})t-\frac{e\vec{\varepsilon}_0(\vec{p}_f-\vec{p})}{m\omega^2}\cos(\omega t)\right]} \tag{58}$$

По аналогии со случаем упругого рассеяния в первом порядке теории возмущений легко получить выражение для рассеянной волны, воспользовавшись тем, что $C_{\mathrm{p}}^{(0)} = \delta(\vec{p}-\vec{p}_i)$:

$$i\hbar\dot{C}_{\mathrm{p}_f}^{(1)}(t) = \langle\varphi_{\mathrm{p}_i}|U|\varphi_{\mathrm{p}_f}\rangle e^{\frac{i}{\hbar}\left[(E_{\mathrm{p}_f}-E_{\mathrm{p}_i})t-\frac{e\vec{\varepsilon}_0(\vec{p}_f-\vec{p}_i)}{m\omega^2}\cos(\omega t)\right]} \tag{59}$$

Подставим в полученное уравнение следующее разложение в ряд Фурье:

$$e^{-\frac{ie\vec{\varepsilon}_0(\vec{p}_f-\vec{p}_i)}{m\hbar\omega^2}\cos(\omega t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{-in\omega t}J_n\left(\frac{e\vec{\varepsilon}_0(\vec{p}_f-\vec{p}_i)}{m\hbar\omega^2}\right) \tag{60}$$

и проинтергируем его по времени:

$$C_{\mathrm{p}_f}^{(1)}(t) = \frac{-i^{n+1}}{2\pi\hbar^{3/2}}A_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}U_{\mathrm{p}_f\mathrm{p}_i}J_n\left(\frac{e\vec{\varepsilon}_0(\vec{p}_f-\vec{p}_i)}{m\hbar\omega^2}\right)\delta(E_f-E_i-n\hbar\omega) \tag{61}$$

Полученное уравнение имеет простой физический смысл: амплитуды распределения по энергии определяются суммой многофотонных процессов, овечающих изменению начальной энергии электрона на $n\hbar\omega$. Аргумент функции Бесселя получил Теперь не составит труда найти дифференциальную скорость и сечение рассеяния:

$$\frac{\dot{W}_n^{(1)}}{d\vec{p}_f} = \frac{A_0^2}{(2\pi)^3\hbar^4}|U_{\mathrm{p}_i\mathrm{p}_f}J_n\left(\frac{e\vec{\varepsilon}_0(\vec{p}_f-\vec{p}_i)}{m\hbar\omega^2}\right)|^2\delta(E_{\mathrm{p}_f}-E_{\mathrm{p}_i}-n\hbar\omega), \tag{62}$$

здесь мы воспользовались тем, что произведение дельта-функций для разных многофотонных каналов дает ноль и выписали выражение только для одного из многофотонных процессов с индексом n. Нормируя начальную ВФ на единичный поток ($A_0 = \sqrt{m/p_0}$) и интегрируя по абсолютному значению p_f получим следующее выражение для дифференциального сечения МВТИ:

$$\frac{d\sigma_n^{(1)}}{d\Omega_{\mathrm{p}_f}} = \frac{m^2p_f}{4\pi^2\hbar^4p_i}|U_{\mathrm{p}_i\mathrm{p}_f}|^2J_n^2\left(\frac{e\vec{\varepsilon}_0(\vec{p}_f-\vec{p}_i)}{m\hbar\omega^2}\right)|_{\mathrm{p}_f=\sqrt{p_i^2\pm2mn\hbar\omega}}, \tag{63}$$