Л.5.1 Рассеяние на потенциальном центре в Борновском приближении

Рассмотрим задачу о рассеянии электрона в приближении плоской волны на потенциальном центре. Будем решать задачу рассматривая взаимодействие электрона с потенциалом по теории возмущений. Для того чтобы получить достоверные результаты необходимо чтобы кинетическая энергия электрона во много раз превосходила потенциальную.

$$\begin{cases} i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} - U(\vec{r})\right]\psi, \\ \psi_0 = A_0 e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}_0\cdot\vec{r}} = A_0\varphi_{\mathrm{p}_0} \end{cases} \tag{48}$$

Решение будем искать в виде разложения по невозмущенным ВФ, то есть тоже по плоским волнам:

$$\psi(\vec{r},t) = \int d\vec{p}C_{\mathrm{p}}(t)\varphi_{\mathrm{p}}e^{-\frac{i}{\hbar}E_{\mathrm{p}}t} \tag{49}$$

Подставляя в исходное уравнение, умножая на комплексно сопряженную ВФ невозмущенного базиса и интегрируя по всему пространству, получим бесконечную систему уравнений:

$$i\hbar\dot{C}_{\mathrm{p}}(t) = \int d\vec{p'}\langle\varphi_{\mathrm{p}}|U|\varphi_{\mathrm{p}'}\rangle C_{\mathrm{p}'}(t)\varphi_{\mathrm{p}}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_{\mathrm{p}'}-E_{\mathrm{p}})t} \tag{50}$$

Однако в первом порядке теории возмущений легко получить выражение для рассеянной волны, воспользовавшись тем, что $C_{\mathrm{p}}^{(0)} = \delta(\vec{p}-\vec{p}_0)$:

$$i\hbar\dot{C}_{\mathrm{p}}^{(1)}(t) = \langle\varphi_{\mathrm{p}}|U|\varphi_{\mathrm{p}_0}\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}(E_{\mathrm{p}0}-E_{\mathrm{p}})t} \tag{51}$$

То есть амплитуда рассеяния в первом борновском приближении задается матричным элементом (Фурье образом) потенциала на котором происходит рассеяние. Проинтегрируем последнее выражение по времени и вынесем из матричного элемента нормировочные константы: $C_{\mathrm{p}}^{(0)} = \delta\vec{p}-\vec{p}_0$:

$$C_{\mathrm{p}}^{(1)}(t) = -2\pi i A A_0 U_{\mathrm{pp}_0}\delta(E_{\mathrm{p}_0}-E_{\mathrm{p}}) \tag{52}$$

Теперь не составит труда найти дифференциальную скорость и сечение рассеяния:

$$\frac{\dot{W}}{d\vec{p}} = 4\pi^2A^2A_0^2|U_{\mathrm{pp}_0}|^2\delta(E_{\mathrm{p}_0}-E_{\mathrm{p}})\delta(0) = \frac{2\pi}{\hbar}A^2A_0^2|U_{\mathrm{pp}_0}|^2\delta(E_{\mathrm{p}_0}-E_{\mathrm{p}}) \tag{53}$$

$$\frac{\dot{W}}{d\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar}A^2A_0^2\int p^2dp|U_{\mathrm{pp}_0}|^2\delta(E_{\mathrm{p}_0}-E_{\mathrm{p}}) \tag{54}$$

Нормируя начальную ВФ на единичный поток ($A_0 = \sqrt{m/p_0}$) получим следующее выражение для дифференциального сечения рассеяния:

$$\frac{\sigma^{(1)}}{d\Omega} = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4}|U_{\mathrm{pp}_0}|^2|_{\mathrm{p}=\mathrm{p}_0} \tag{55}$$