Л.5 Свободный электрон в поле электромагнитной волны

Рассмотрим задачу о взаимодействии лазерного лазерного излучения с электроном:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left[\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}-(\hat{\vec{d}}\cdot\vec{\varepsilon}(t))\right]\psi \text{ или } i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left[\frac{\left(\hat{\vec{p}}-\frac{e}{c}\vec{A}(t)\right)^2}{2m}\right]\psi \tag{42}$$

Рассмотрим решение в $p-A$ калибровке, будем искать его ввиде разложения по плоским волнам:

$$\psi(\vec{r},t)=\int d\vec{p}C_{\mathbf{p}}(t)\phi_{\mathbf{p}} \tag{43}$$

где $\phi_{\mathbf{p}}=e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}}$, тогда в момент времени $t=0$ начальное условие будет иметь вид плоской волны $\psi(\vec{r},t=0)=\phi_{\mathbf{p}_0}$. Подставляя общее решение в уравнение (42) получим уравнение для амплитуд:

$$i\hbar\int d\vec{p}\dot{C}_{p}\phi_{\mathbf{p}}=\int d\vec{p}C_{p}\left(\frac{p^2}{2m}-\frac{e}{mc}\vec{p}\cdot\vec{A}+\frac{e^2}{2mc^2}\right)\phi_{\mathbf{p}} \tag{44}$$

Откуда легко видеть, что:

$$i\hbar\dot{C}_{\mathbf{p}}=C_{\mathbf{p}}\frac{\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2}{2m} \tag{45}$$

Решение этого уравнения:

$$C_{\mathbf{p}}=C_{\mathbf{p}}(t=0)e^{-\frac{i}{\hbar}\int\limits_0^t dt'\frac{\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}(t')\right)^2}{2m}} \tag{46}$$

Откуда, с учетом $C_{\mathbf{p}}(t=0)=\delta(\vec{p}-\vec{p}_0)$, получим:

$$\psi_{\mathbf{p}}^{V}(\vec{r},t)=\phi_{\mathbf{p}_0}e^{-\frac{i}{\hbar}\int\limits_0^t dt'\frac{\left(\vec{p}_0-\frac{e}{c}\vec{A}(t')\right)^2}{2m}} \tag{47}$$

Данное решение называют волковской волновой функцией, описывающей поведение свободного электрона в лазерном поле в приближении плоской волны.

Задачи

1. Найти среднюю энергию электрона в лазерном поле.
2. Найти волковскую волновую функцию в $d-E$ калибровке