

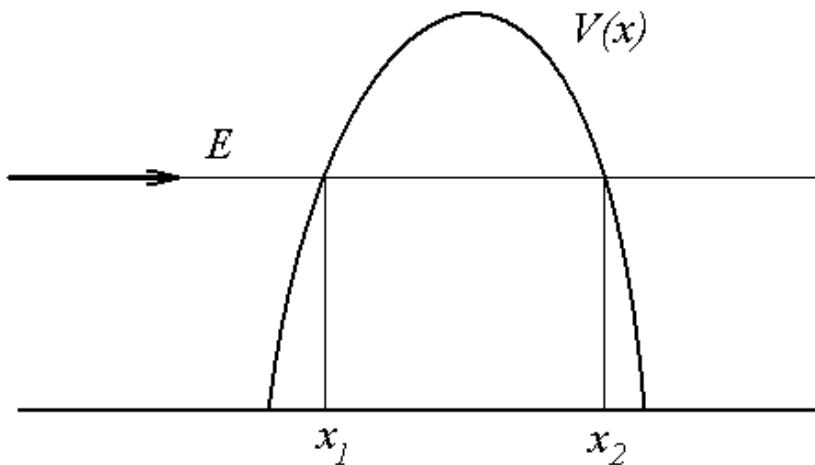
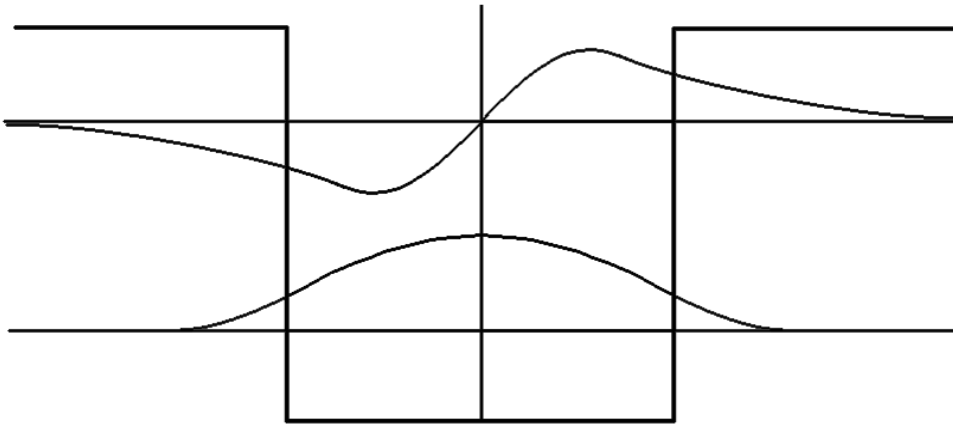
Атомная физика

Лекция 6

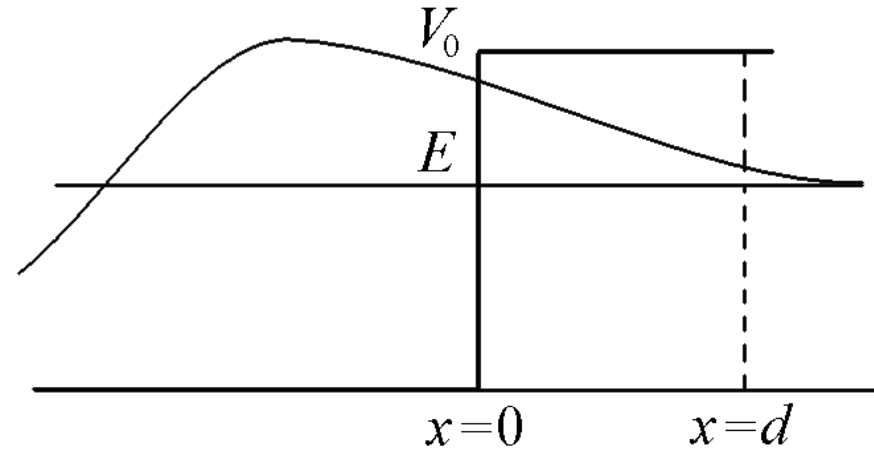
проф. Попов Александр Михайлович

Туннельный эффект

Частица может находиться в области
классически запрещенного движения



$$\psi(x) \sim \exp(-\kappa x) \quad \kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}$$



$$D \sim |\psi(x=d)|^2 \sim \exp(-2\kappa d) = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)} d\right)$$

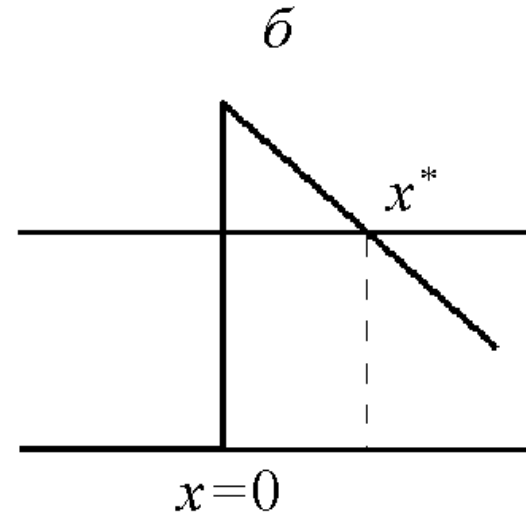
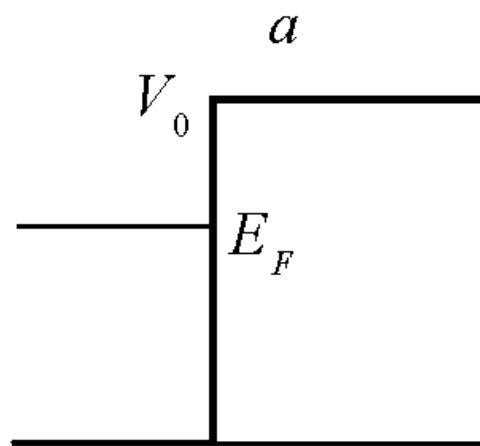
$$D \sim \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(V(x) - E)} dx\right)$$

Туннельный эффект II

- 1) Автоэлектронная эмиссия
- 2) α - распад атомных ядер
- 3) Туннельная ионизация атомов в лазерном поле
- 4) Туннельный микроскоп

Автоэлектронная эмиссия

Термо- и автоэмиссия (Р.Вуд, 1897; Р.Фаулер и Л.Нордхейм, 1928-29).



$$V(x) = V_0 - e\epsilon x$$

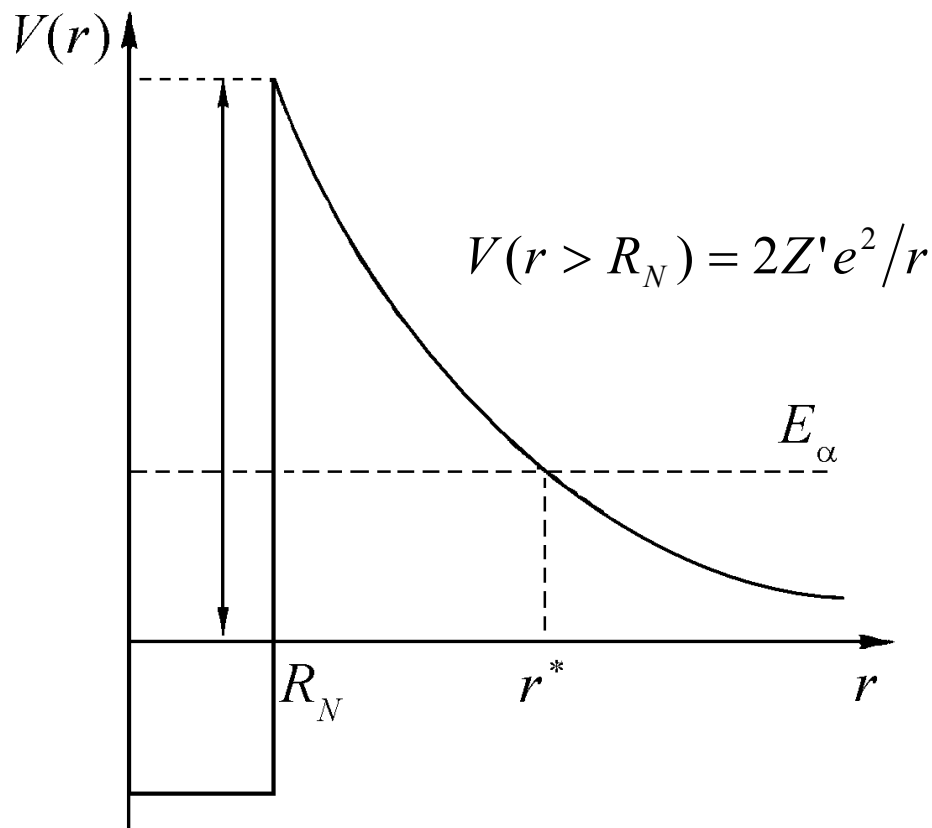
$$D \sim \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_0^{x^*} \sqrt{2m(V_0 - E_F - e\epsilon x)} dx\right)$$

$$V_0 - E_F = e\epsilon x^*$$

$$j \sim D \sim \exp\left(-\frac{4}{3} \frac{\sqrt{2mA_e^3}}{e\hbar\epsilon}\right)$$

α - распад атомных ядер

Г.Гамов, 1927



$$D \sim \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{R_N}^{r^*} \sqrt{2M_\alpha \left(\frac{2Z'e^2}{r} - E_\alpha\right)} dr\right) \quad Z' = Z - 2$$

Классическая точка поворота $r^* = 2Z'e^2/E_\alpha$

Вычисление интеграла $\int \sqrt{1-1/x} dx$ $x = \sin^2 \xi$

Если $R_N \ll r^*$

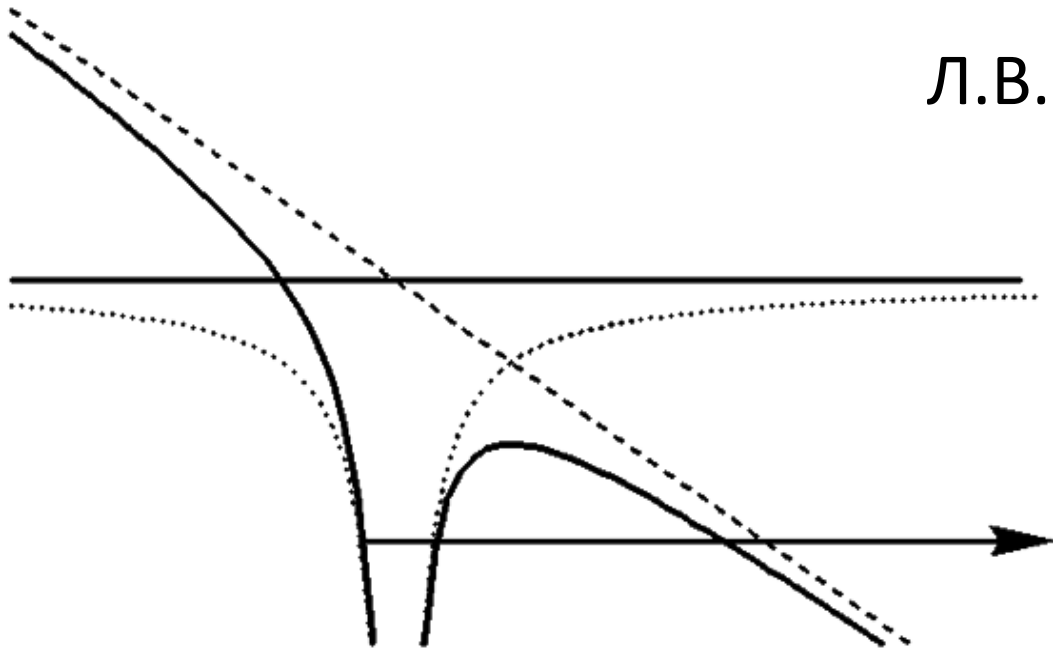
$$D \sim \exp\left(-\frac{4\pi Z'e^2}{\hbar v_\alpha}\right) \quad v_\alpha = \sqrt{2E_\alpha/M_\alpha}$$

Эксперимент: Закон Гейгера-Неттола (1911)

$$\lg(T_{1/2}) = C + \frac{ZB}{\sqrt{E_\alpha}}$$

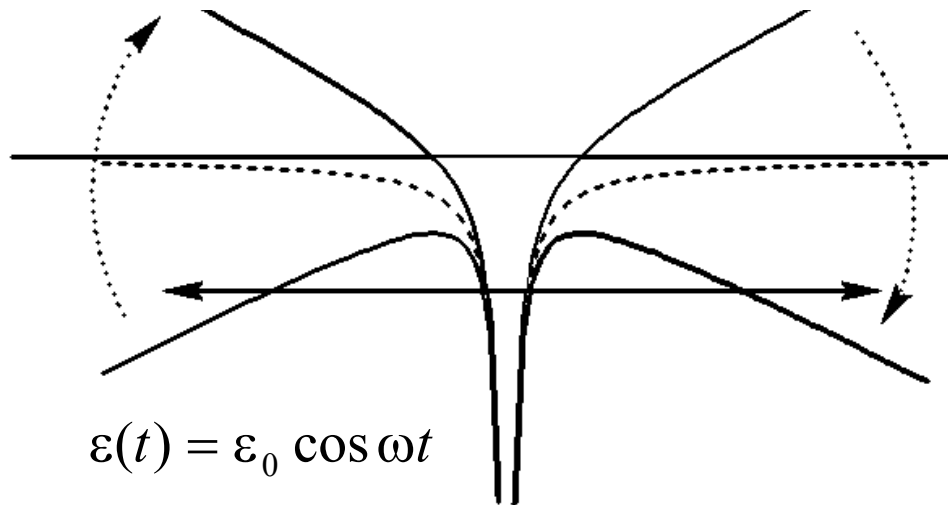
Туннельная ионизация атомов в лазерном поле

Л.В.Келдыш (1964)



$$V(x) = V_a(x) - e\epsilon x$$

$$w_i \sim D \sim \exp\left(-\frac{4}{3} \frac{\sqrt{2mI^3}}{e\hbar\epsilon_0}\right)$$



$$\epsilon(t) = \epsilon_0 \cos \omega t$$

Параметр Келдыша $\gamma = \frac{\omega \sqrt{2mI}}{e\epsilon_0} \ll 1$

$\gamma < 1$ – туннельный эффект

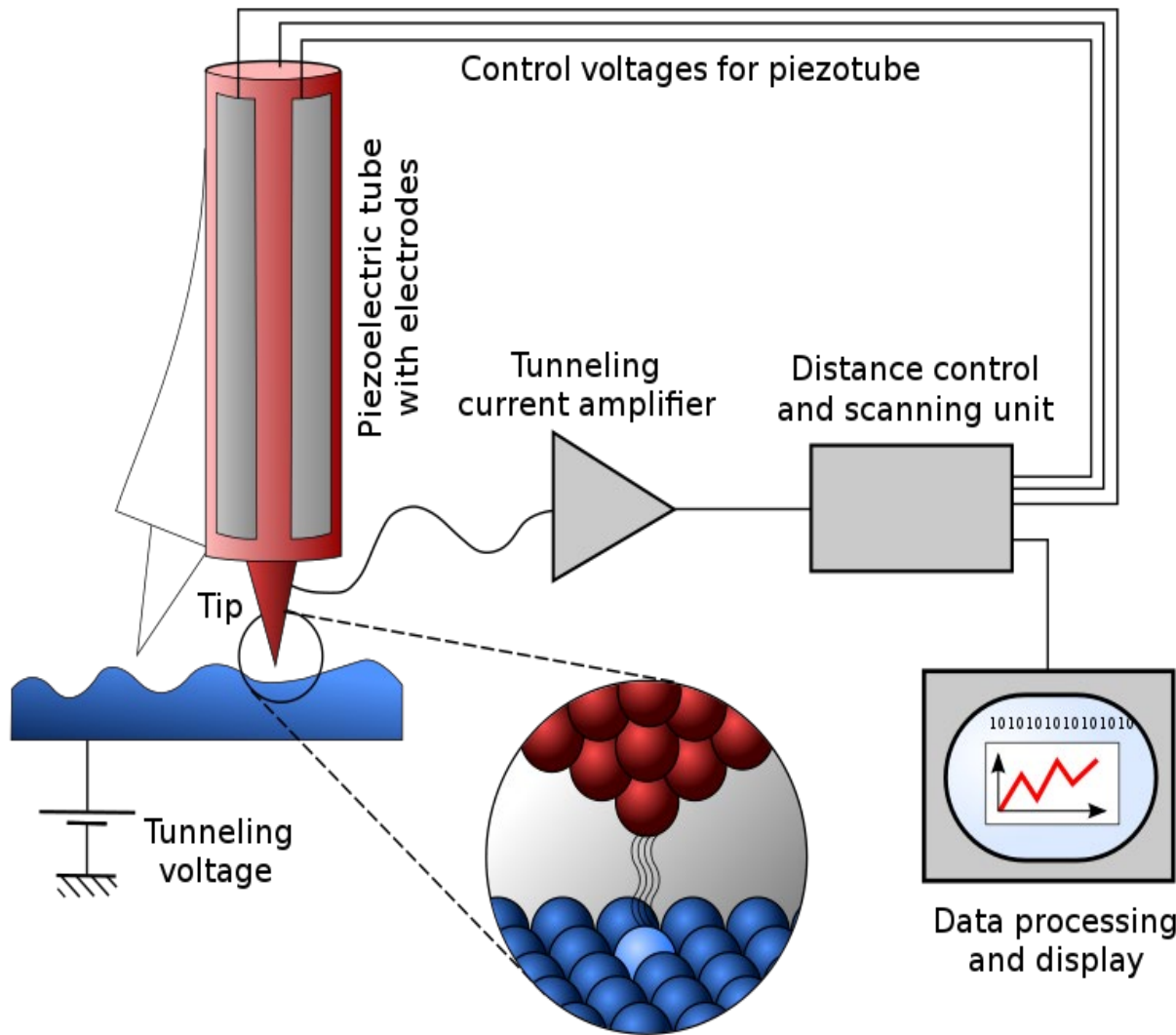
$\gamma > 1$ – многоквантовый фотоэффект

Эксперименты С.Л.Чина (1985)

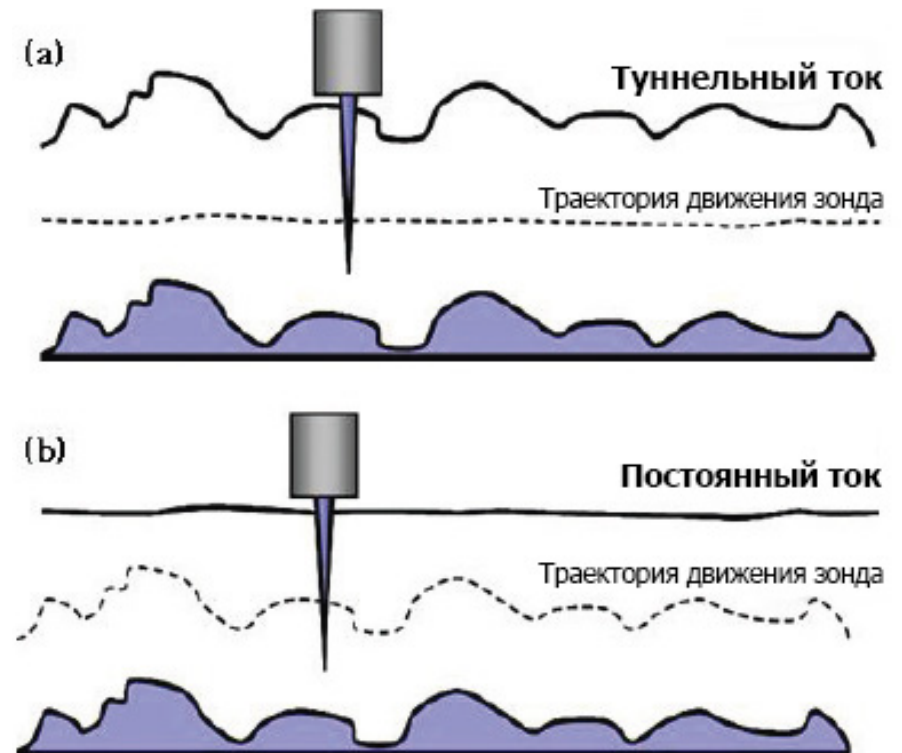
Туннельный микроскоп

Г.Биннинг и Г. Рорер (1982)

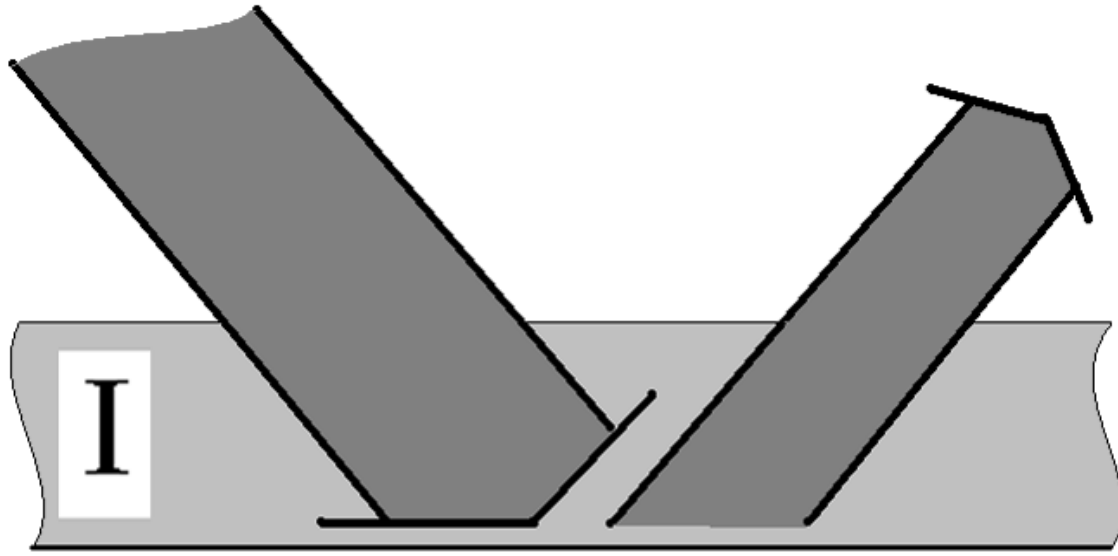
Разрешающая способность микроскопа достигает величины порядка одного ангстрема вдоль поверхности образца и сотых долей ангстрема по высоте рельефа



- 1) Возможность исследовать рельеф поверхности с ангстремным разрешением
- 2) Возможность детектировать отдельные атомы на поверхности



Туннельный эффект: оптическая аналогия

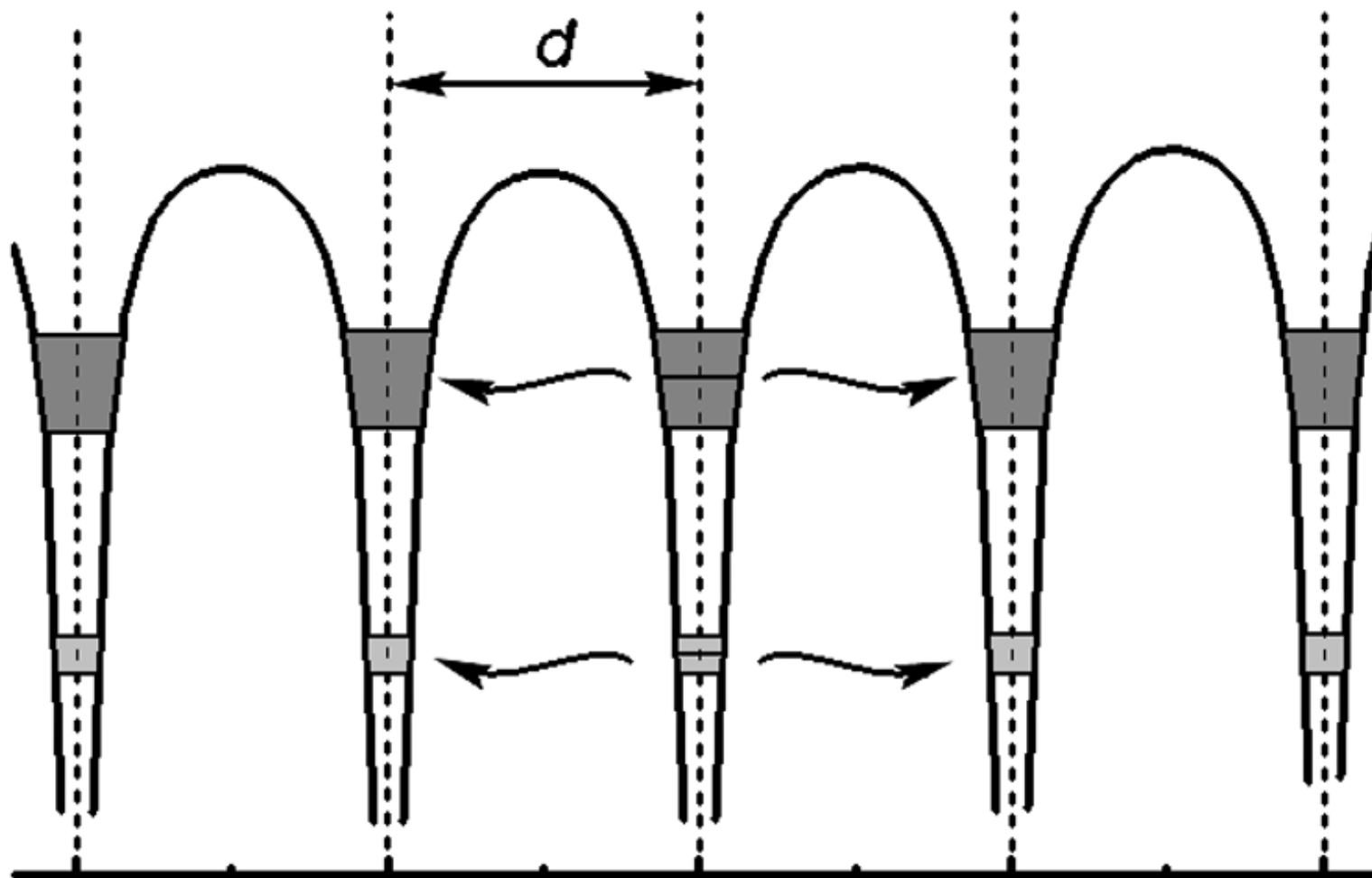


Полное внутренне отражение



Оптический аналог туннельного эффекта: (прохождение пучка света через систему стеклянных пластин, разделенных вакуумным зазором)

Зонная структура спектра твердых тел



$$\Delta E \tau \sim \hbar$$

Гармонический осциллятор

- 1) Колебания молекул
- 2) Колебаний кристаллической решетки
- 3) Моды электромагнитного поля
- 4) Модели атомного ядра
- 5) Современная наноэлектроника

$$V(x) = m\omega^2 x^2 / 2$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

Стационарные состояния

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{m^2 \omega^2 x^2}{\hbar^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \right) \psi(x) = 0 \quad \xrightarrow[\substack{\xi = x/a \\ a = \sqrt{\hbar/m\omega}}]{\substack{\varepsilon = E/E_0 \\ E_0 = \hbar\omega/2}} \left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 + \varepsilon \right) \psi(\xi) = 0$$

Асимптотическое поведение

$$\xi \rightarrow \pm\infty \quad \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} - \xi^2 \psi \approx 0 \quad \longrightarrow \quad \psi \sim \exp(-\xi^2/2)$$

$$\psi(\xi) = v(\xi) \exp(-\xi^2/2)$$

$$v'' - 2\xi v' + (\varepsilon - 1)v = 0$$

Гармонический осциллятор II

$$\psi(\xi) = v(\xi) \exp(-\xi^2/2)$$

$$v'' - 2\xi v' + (\varepsilon - 1)v = 0$$

Решение

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\psi_n(x) = N_n H_n(x/a) \exp(-x^2/2a^2)$$

$$a = \sqrt{\hbar/m\omega}$$

$$N_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n! a \sqrt{\pi}}}$$

Полиномы Эрмита

$$H_n(\xi) = (-1)^n \exp(\xi^2) \frac{d^n}{d\xi^n} \exp(-\xi^2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi) H_m(\xi) \exp(-\xi^2) d\xi = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn} \quad \text{нормировка}$$

Явные выражения для первых нескольких полиномов

$$H_0(\xi) = 1$$

$$H_1(\xi) = 2\xi$$

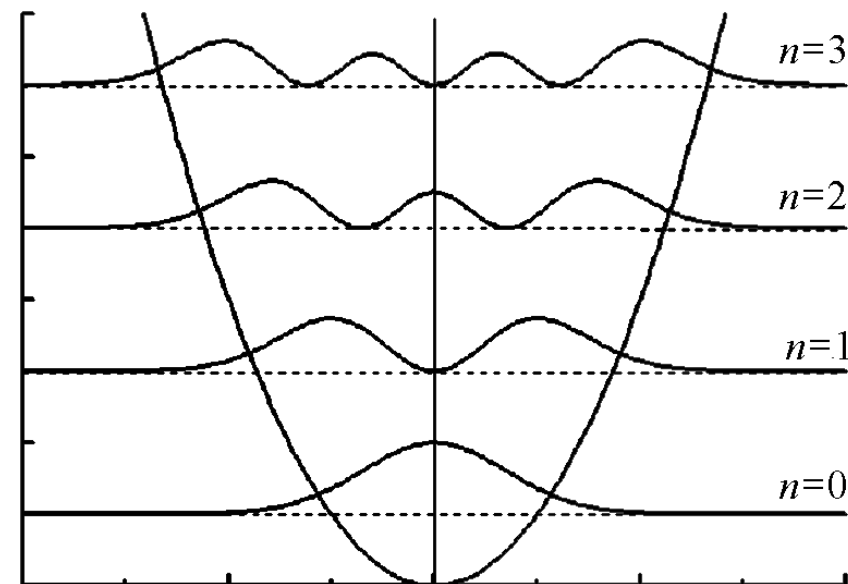
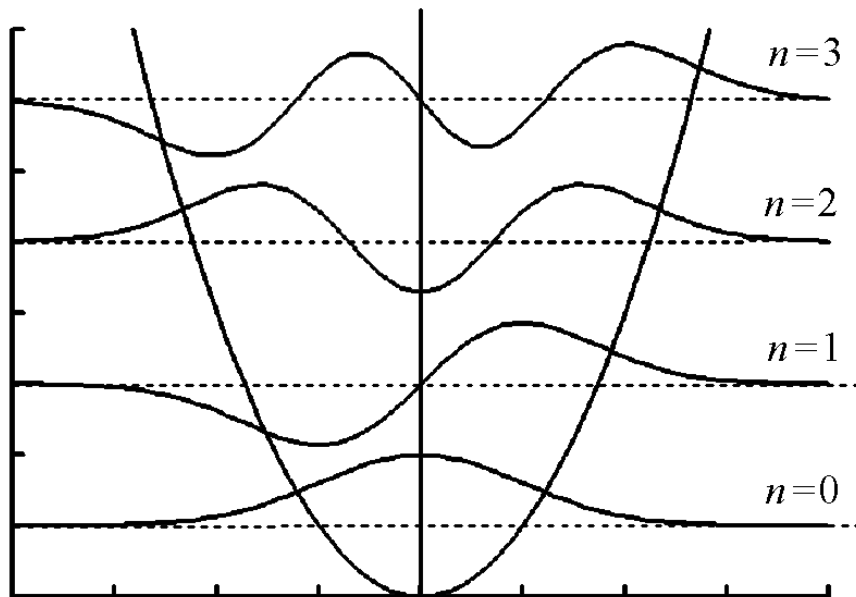
$$H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$$

$$H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi$$

Некоторые свойства

- 1) Эквидистантность спектра
- 2) Четность состояний (коммутация с оператором четности)
- 3) Энергия «нулевых» колебаний и соотношение неопределенностей

Гармонический осциллятор III



Средние значения некоторых величин в стационарных состояниях

$$\langle x \rangle = \int x |\psi(x)|^2 dx = 0$$

$$\langle p \rangle = \int \psi^*(x) \hat{p} \psi(x) dx = 0$$

$$\langle T \rangle_n = \langle p^2 / 2m \rangle_n = \frac{1}{2m} \int \psi_n^* \hat{p}^2 \psi_n dx = \frac{\hbar \omega}{2} (n + 1/2)$$

$$\langle V \rangle_n = \langle m \omega^2 x^2 / 2 \rangle_n = \frac{m \omega^2}{2} \int \psi_n^* x^2 \psi_n dx = \frac{\hbar \omega}{2} (n + 1/2)$$

$$\langle T \rangle_n = \langle V \rangle_n = E_n / 2$$

Нестационарные состояния осциллятора

Любое нестационарное состояние может быть представлено как суперпозиция стационарных.

Например, имеем
$$\psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0(x) + \psi_1(x))$$

Временная эволюция
$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_0(x) \exp\left(-i \frac{\omega t}{2}\right) + \psi_1(x) \exp\left(-i \frac{3\omega t}{2}\right)\right)$$

Плотность вероятности

$$\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2 = \frac{1}{2}|\psi_0(x)|^2 + \frac{1}{2}|\psi_1(x)|^2 + \psi_0(x)\psi_1(x) \cos \omega t$$

Координата

$$\langle x(t) \rangle = \int x \rho(x, t) dx = \int x \left(\frac{1}{2}|\psi_0(x)|^2 + \frac{1}{2}|\psi_1(x)|^2 + \psi_0(x)\psi_1(x) \cos \omega t \right) dx = x_{01} \cos \omega t$$

$$x_{01} = \int x \psi_0(x) \psi_1(x) dx = a/\sqrt{2} = \sqrt{\hbar/2m\omega}$$

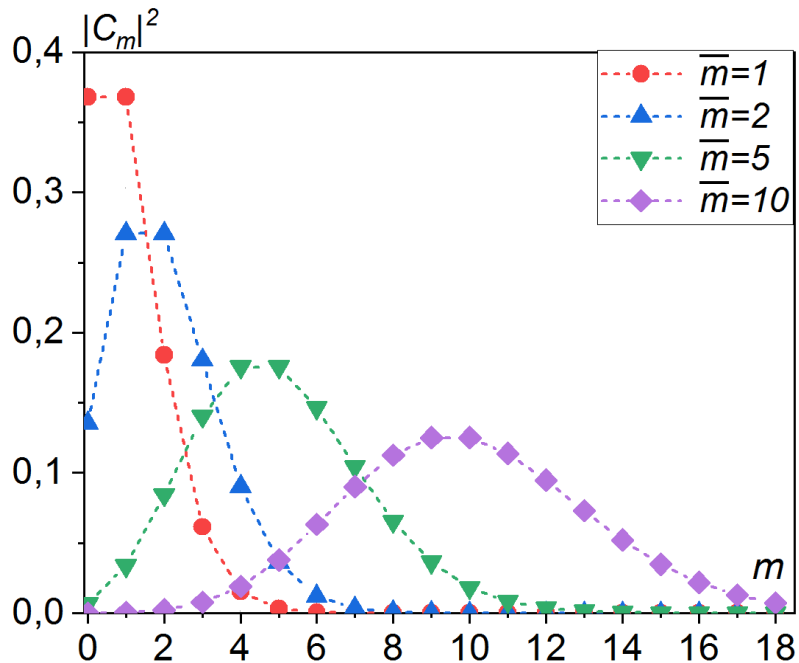
Понятие о когерентном состоянии осциллятора

Осциллятор под действием вынуждающей резонансной силы

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \psi - exE_0 \cos(\omega t) \psi$$

$$\langle x(t) \rangle = \frac{eE_0}{2m\omega} t \sin \omega t, \quad \langle p(t) \rangle = \frac{eE_0 \hbar}{2} \cos \omega t$$

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) \psi_n(x) \exp(-i\omega(n+1/2)t)$$



$$|C_m(t)|^2 = \frac{\bar{m}^m}{m!} \exp(-\bar{m})$$

$$\bar{m} = (\alpha t)^2 / 2$$

$$\alpha = eE_0 a / (2\hbar)$$

