Атомная физика

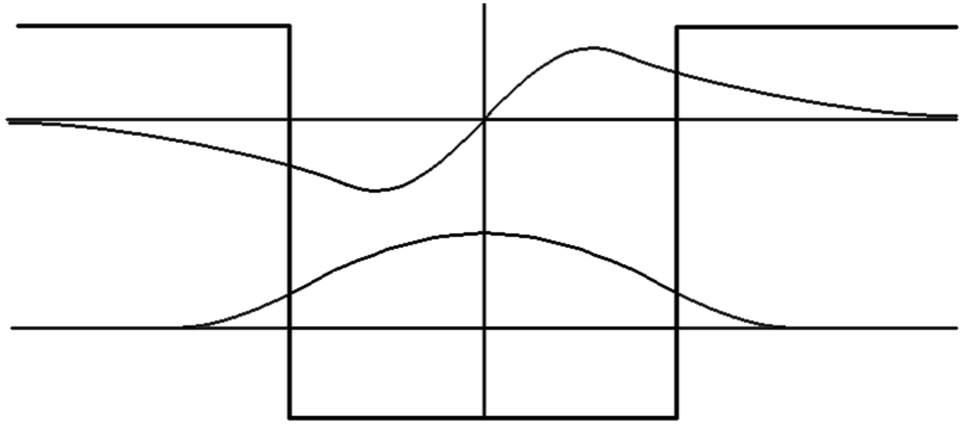
Лекция 6

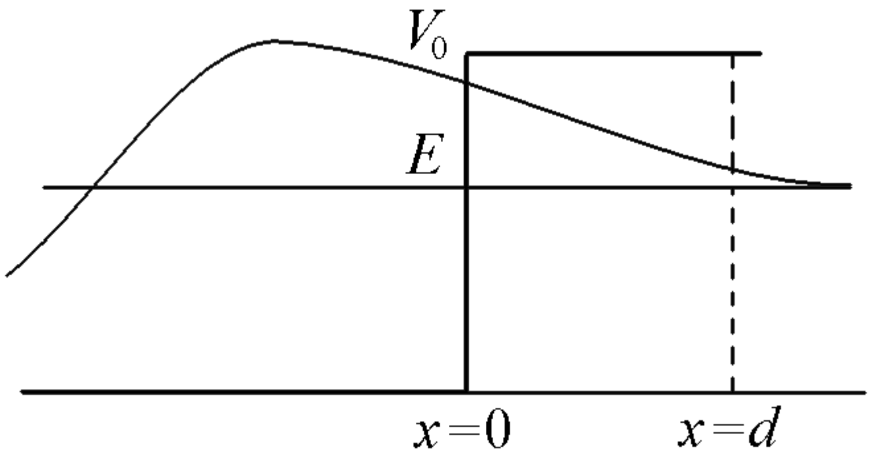
проф. Попов Александр Михайлович

Туннельный эффект

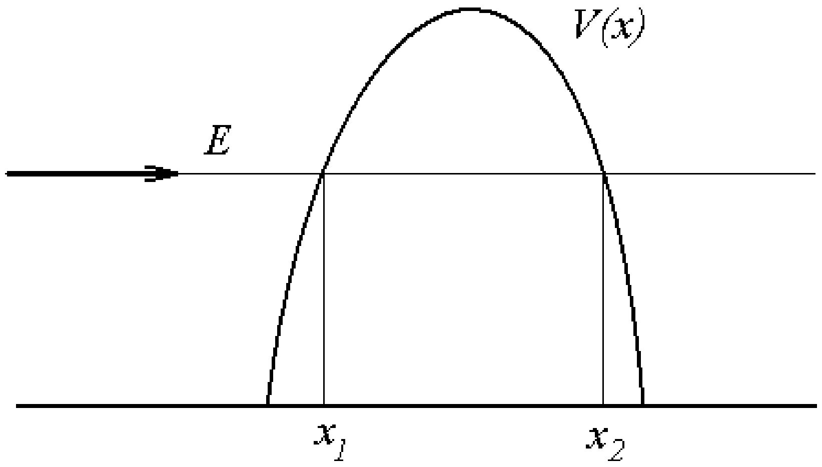
Частица может находиться в области классически запрещенного движения

$$\psi(x) \sim \exp(-\kappa x) \qquad \kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}$$





$$D \sim |\psi(x=d)|^2 \sim \exp(-2\kappa d) = \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)}d\right)$$



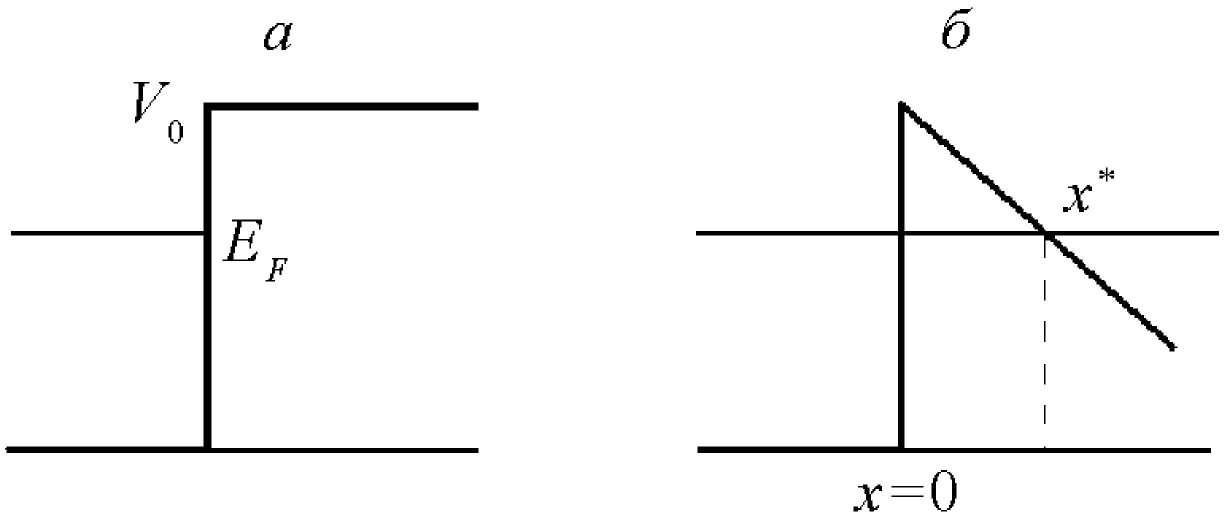
$$D \sim \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m(V(x) - E)}dx\right)$$

Туннельный эффект II

1) Автоэлектронная эмиссия
2) α - распад атомных ядер
3) Туннельная ионизация атомов в лазерном поле
4) Туннельный микроскоп

Автоэлектронная эмиссия

Термо- и автоэмиссия (Р.Вуд, 1897; Р.Фаулер и Л.Нордхейм, 1928-29).



$$V(x) = V_0 - e\varepsilon x$$

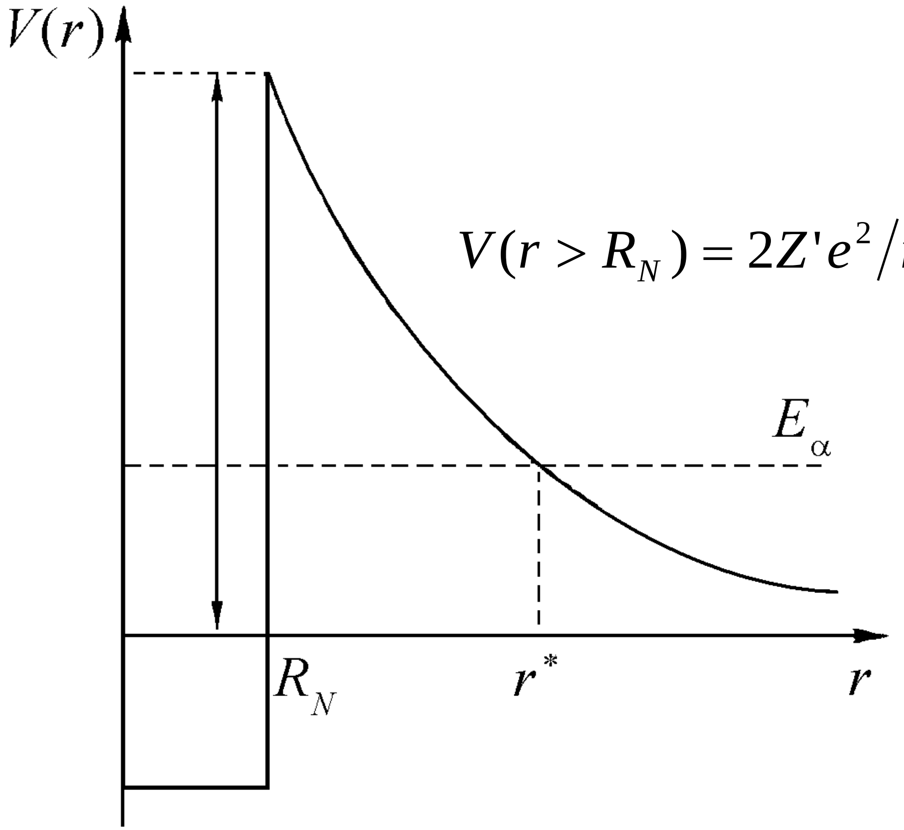
$$D \sim \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_0^{x^*} \sqrt{2m(V_0 - E_F - e\varepsilon x)}\,dx \right)$$

$$V_0 - E_F = e\varepsilon x^*$$

$$j \sim D \sim \exp\left(-\frac{4}{3}\frac{\sqrt{2mA_e^3}}{e\hbar\varepsilon} \right)$$

α - распад атомных ядер

Г.Гамов, 1927



$$D \sim \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{R_N}^{r^*}\sqrt{2M_\alpha\left(\frac{2Z'e^2}{r}-E_\alpha\right)}dr\right)$$

$$Z' = Z - 2$$

Классическая точка поворота $r^* = 2Z'e^2/E_\alpha$

Вычисление интеграла $\int\sqrt{1-1/x}\,dx$ $\quad x = \sin^2\xi$

Если $R_N \ll r^*$

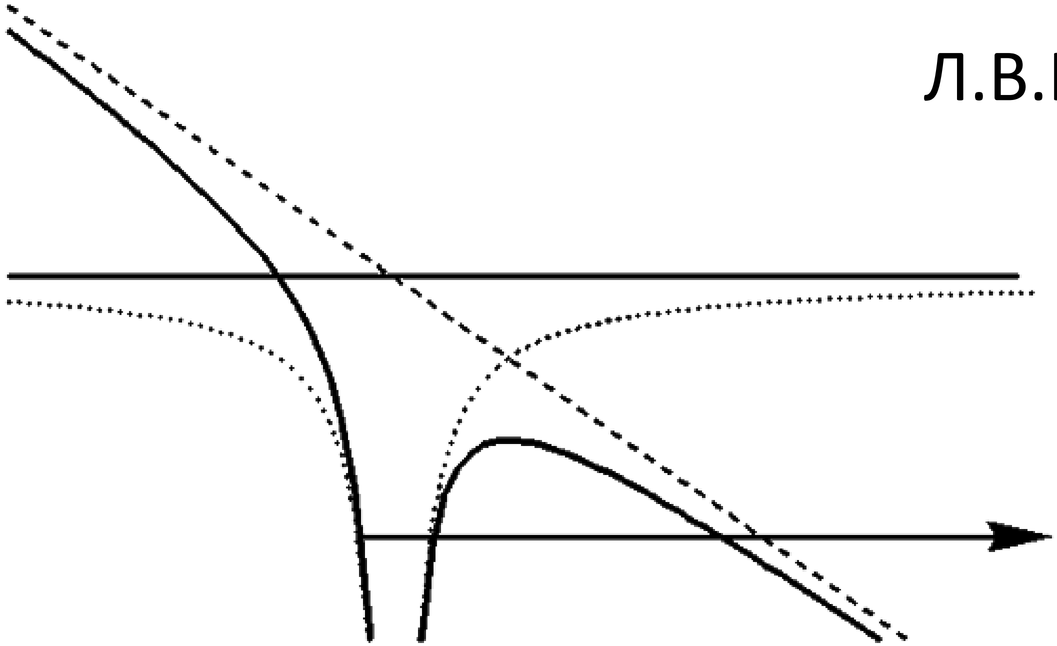
$$\boxed{D \sim \exp\left(-\frac{4\pi Z'e^2}{\hbar v_\alpha}\right)} \qquad v_\alpha = \sqrt{2E_\alpha/M_\alpha}$$

Эксперимент: Закон Гейгера-Неттола (1911)

$$\boxed{\lg(T_{1/2}) = C + \frac{ZB}{\sqrt{E_\alpha}}}$$

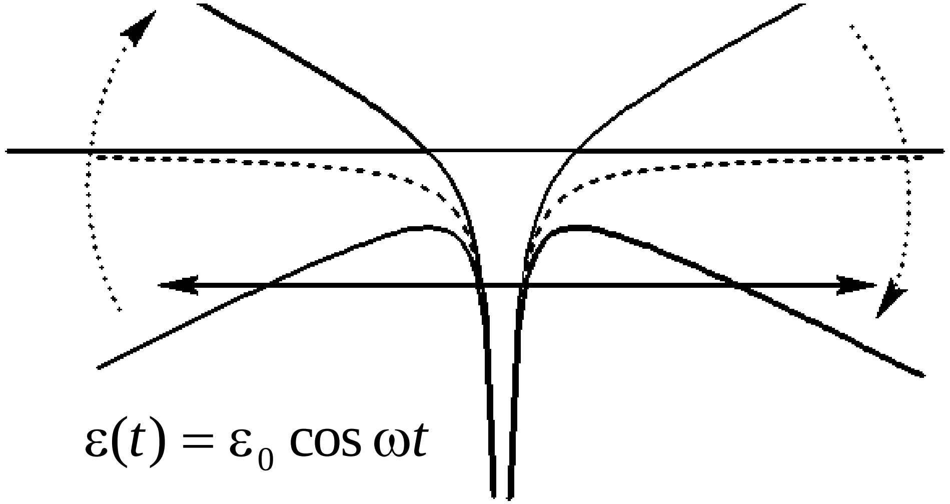
Туннельная ионизация атомов в лазерном поле

Л.В.Келдыш (1964)



$$V(x) = V_a(x) - e\varepsilon x$$

$$w_i \sim D \sim \exp\left(-\frac{4}{3}\frac{\sqrt{2mI}^{3}}{e\hbar\varepsilon_0}\right)$$



$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t$$

Параметр Келдыша $\gamma = \dfrac{\omega\sqrt{2mI}}{e\varepsilon_0} << 1$

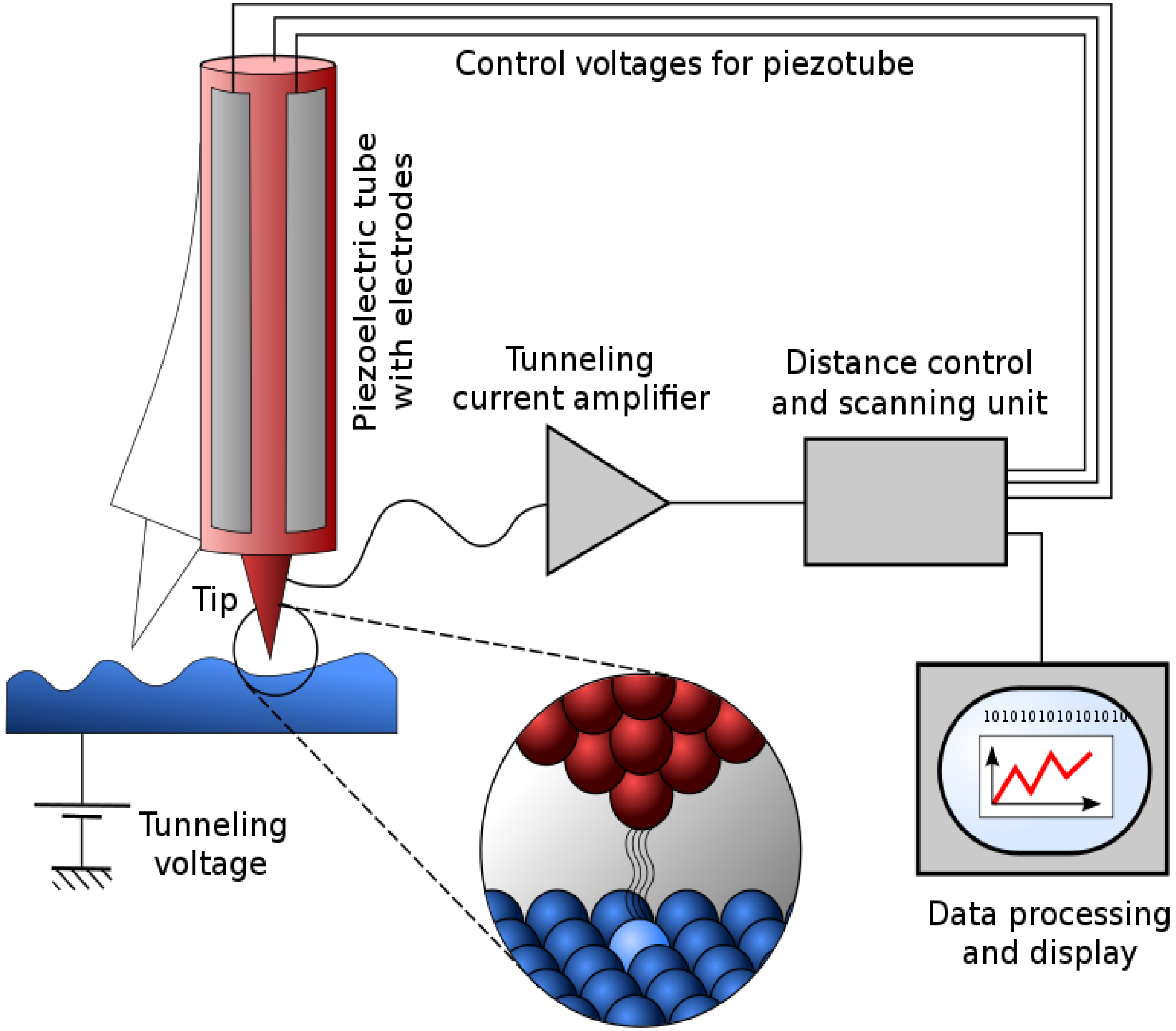
$\gamma < 1$ – туннельный эффект

$\gamma > 1$ – многоквантовый фотоэффект

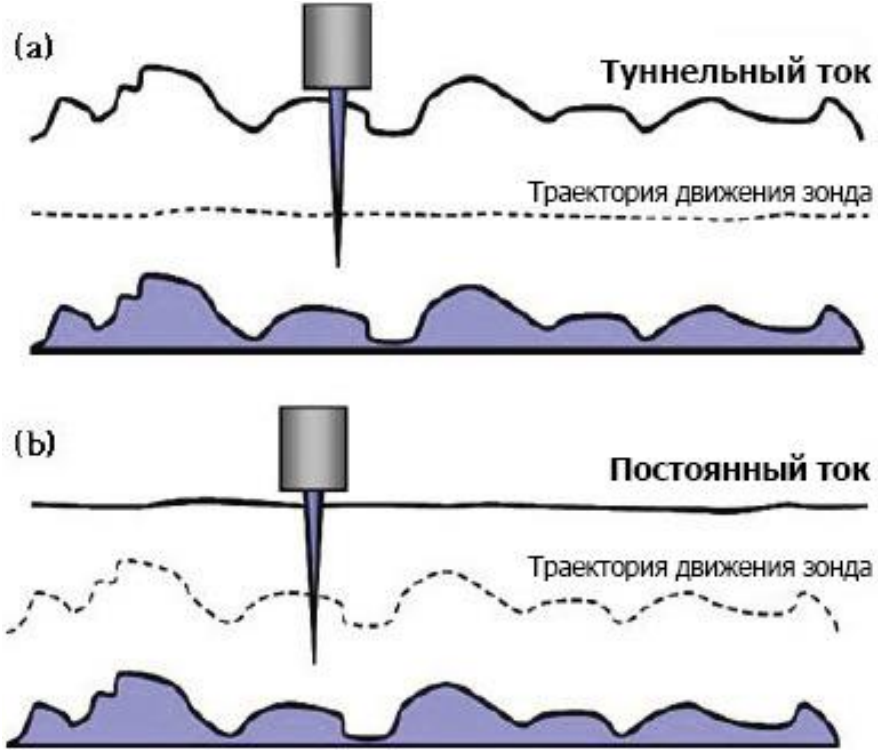
Эксперимены С.Л.Чина (1985)

Туннельный микроскоп

Г.Биннинг и Г. Рорер (1982)

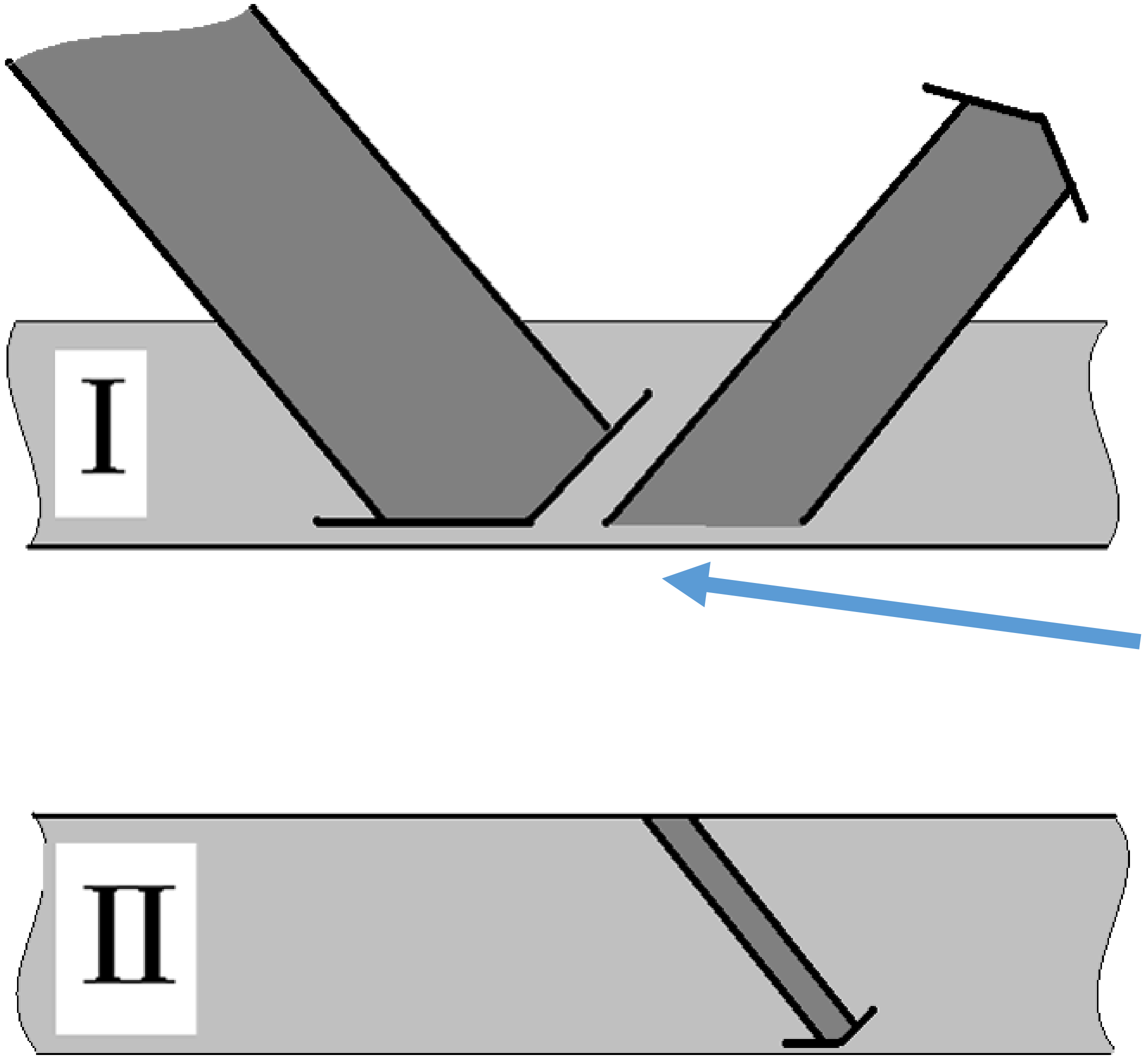


Разрешающая способность микроскопа достигает величины порядка одного ангстрема вдоль поверхности образца и сотых долей ангстрема по высоте рельефа



1) Возможность исследовать рельеф поверхности с ангстремным разрешением
2) Возможность детектировать отдельные атомы на поверхности

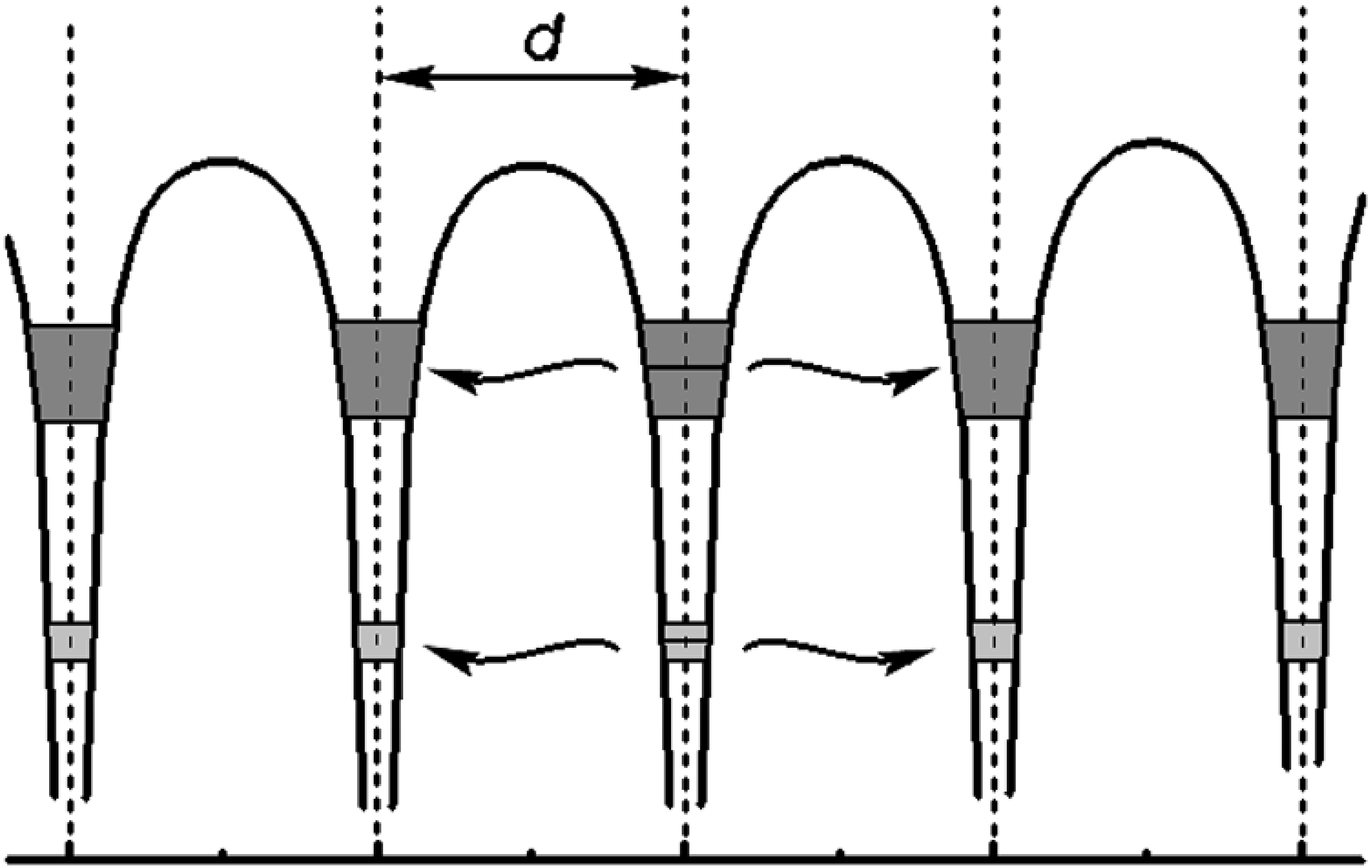
Туннельный эффект: оптическая аналогия



Полное внутренне отражение

Оптический аналог туннельного эффекта: (прохождение пучка света через систему стеклянных пластин, разделенных вакуумным зазором)

Зонная структура спектра твердых тел



$$\Delta E \tau \sim \hbar$$

Гармонический осциллятор

1) Колебания молекул
2) Колебаний кристаллической решетки
3) Моды электромагнитного поля
4) Модели атомного ядра
5) Современная наноэлектроника

$$V(x) = m\omega^2 x^2 / 2$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

Стационарные состояния

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{m^2\omega^2 x^2}{\hbar^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\right)\psi(x) = 0 \quad \xrightarrow[a = \sqrt{\hbar/m\omega} \qquad E_0 = \hbar\omega/2]{\xi = x/a \qquad \varepsilon = E/E_0} \quad \left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 + \varepsilon\right)\psi(\xi) = 0$$

Асимптотическое поведение

$$\xi \to \pm\infty \qquad \frac{d^2\psi}{d\xi^2} - \xi^2\psi \approx 0 \quad \Longrightarrow \quad \psi \sim \exp(-\xi^2/2)$$

$$\psi(\xi) = v(\xi)\exp(-\xi^2/2) \qquad v'' - 2\xi v' + (\varepsilon - 1)v = 0$$

Гармонический осциллятор II

$$\psi(\xi) = v(\xi)\exp(-\xi^2/2)$$

$$v'' - 2\xi v' + (\varepsilon - 1)v = 0$$

Решение

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2) \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

$$\psi_n(x) = N_n H_n(x/a)\exp\left(-x^2/2a^2\right)$$

$$a = \sqrt{\hbar/m\omega}$$

$$N_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n! a\sqrt{\pi}}}$$

Полиномы Эрмита

$$H_n(\xi) = (-1)^n \exp(\xi^2)\frac{d^n}{d\xi^n}\exp(-\xi^2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi)H_m(\xi)\exp\left(-\xi^2\right)d\xi = 2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{mn}$$

нормировка

Явные выражения для первых нескольких полиномов

$$H_0(\xi) = 1$$

$$H_1(\xi) = 2\xi$$

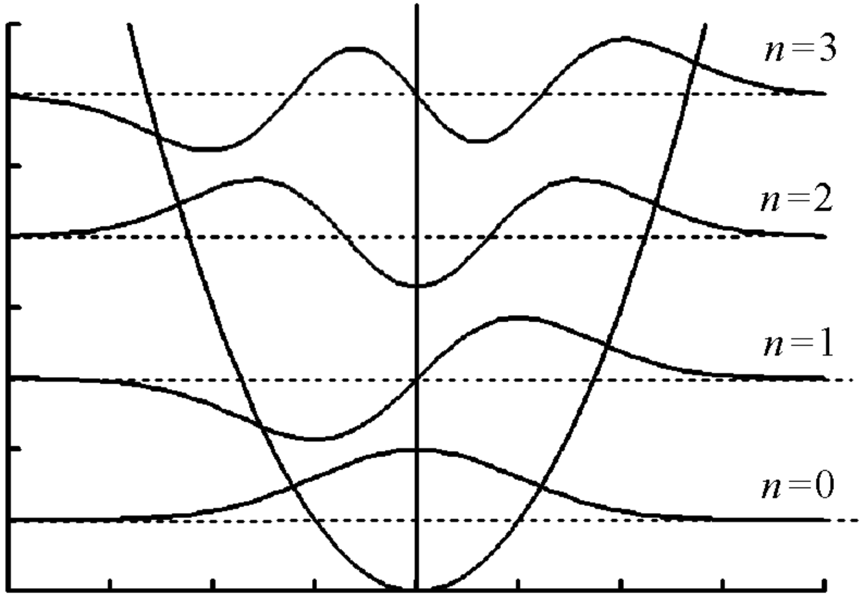
$$H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$$

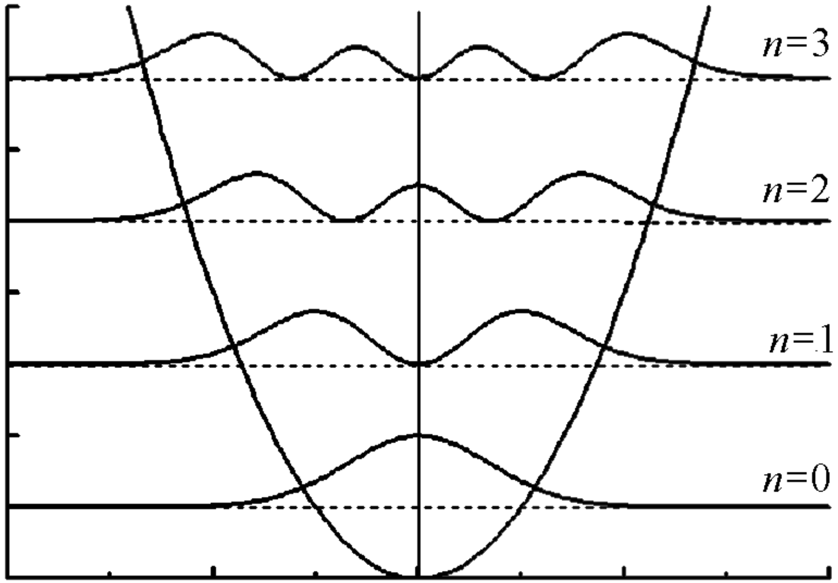
$$H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi$$

Некоторые свойства

1) Эквидистантность спектра
2) Четность состояний (коммутация с оператором четности
3) Энергия «нулевых» колебаний и соотношение неоределенностей

Гармонический осциллятор III





Средние значения некоторых величин в стационарных состояниях

$$\langle x\rangle = \int x|\psi(x)|^2 dx = 0$$

$$\langle p\rangle = \int \psi^*(x)\hat{p}\psi(x)dx = 0$$

$$\langle T\rangle_n = \langle p^2/2m\rangle_n = \frac{1}{2m}\int \psi_n^*\hat{p}^2\psi_n dx = \frac{\hbar\omega}{2}(n+1/2)$$

$$\langle V\rangle_n = \langle m\omega^2 x^2/2\rangle_n = \frac{m\omega^2}{2}\int \psi_n^* x^2\psi_n dx = \frac{\hbar\omega}{2}(n+1/2)$$

$$\langle T\rangle_n = \langle V\rangle_n = E_n/2$$

Нестационарные состояния осциллятора

Любое нестационанрное состояние может быть представлено как суперпозиция стационарных.

Например, имеем
$$\psi(x,t=0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_0(x)+\psi_1(x)\right)$$

Временная эволюция
$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_0(x)\exp\left(-i\frac{\omega t}{2}\right)+\psi_1(x)\exp\left(-i\frac{3\omega t}{2}\right)\right)$$

Плотность вероятности
$$\rho(x,t)=\left|\psi(x,t)\right|^2=\frac{1}{2}\left|\psi_0(x)\right|^2+\frac{1}{2}\left|\psi_1(x)\right|^2+\psi_0(x)\psi_1(x)\cos\omega t$$

Координата
$$\langle x(t)\rangle=\int x\rho(x,t)dx=\int x\left(\frac{1}{2}\left|\psi_0(x)\right|^2+\frac{1}{2}\left|\psi_1(x)\right|^2+\psi_0(x)\psi_1(x)\cos\omega t\right)dx=x_{01}\cos\omega t$$
$$x_{01}=\int x\psi_0(x)\psi_1(x)dx=a/\sqrt{2}=\sqrt{\hbar/2m\omega}$$

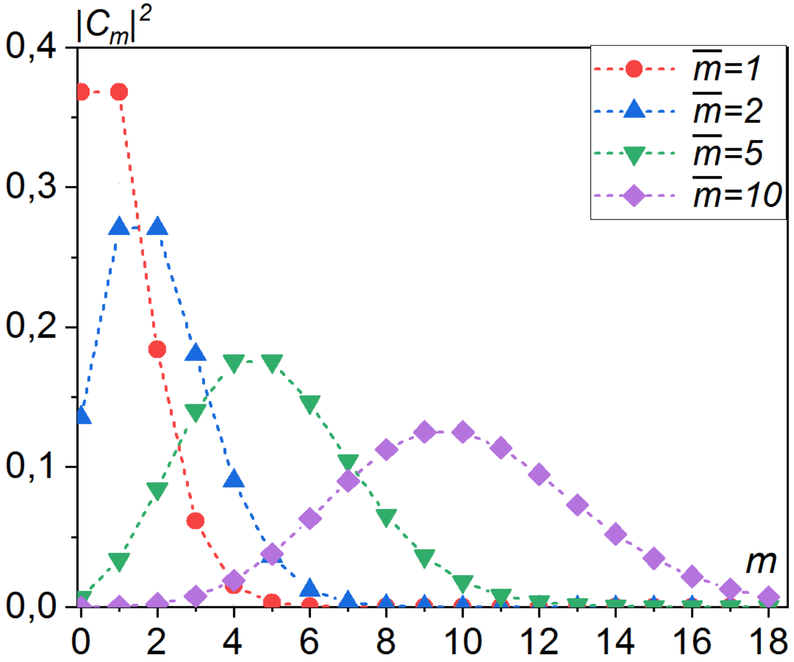
Понятие о когерентном состояния осциллятора

Осциллятор под действием вынуждающей резонансной силы

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\psi - exE_0\cos(\omega t)\psi$$

$$\langle x(t)\rangle = \frac{eE_0}{2m\omega}t\sin\omega t, \quad \langle p(t)\rangle = \frac{eE_0 t}{2}\cos\omega t$$

$$\psi(x,t) = \sum^{\infty} C_n(t)\psi_n(x)\exp\left(-i\omega(n+1/2)t\right)$$



$$\left|C_m(t)\right|^2 = \frac{\overline{m}^m}{m!}\exp(-\overline{m})$$

$$\overline{m} = (\alpha t)^2/2$$

$$\alpha = eE_0 a/(2\hbar)$$