

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Межфакультетский курс

ФИЗИКА СВЕРХПРОВОДИМОСТИ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЯ

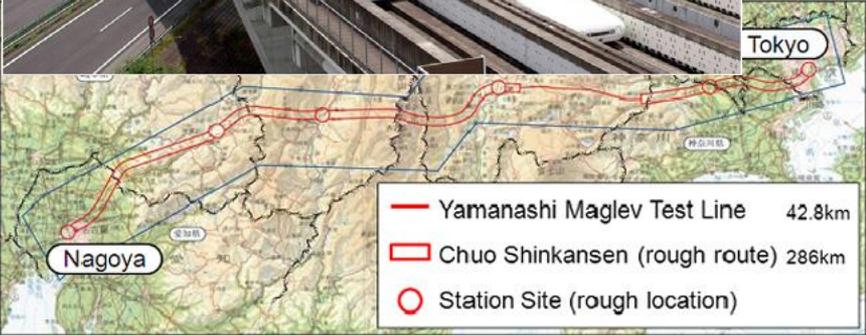
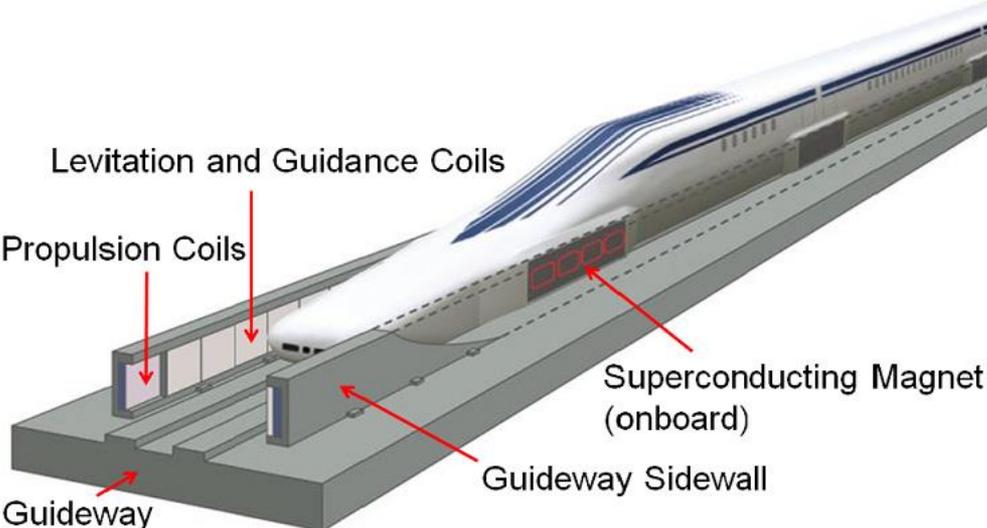
Лекторы: проф. Корнев В.К., доцент Колотинский Н.В.

Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

Литература:

1. В. В. Шмидт. Введение в физику сверхпроводников. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: МЦНМО, 2000.
2. P. Seidel, ed., “Applied Superconductivity: Handbook on Devices and Applications”, Wiley-VCH, Verlag GmbH & Co. KGaA, 2015.
3. Sh. Nishijima, St. Tckroad et al. “Superconductivity and the environment: a roadmap”, Supercond. Science and Technology, vol. 26, p. 113001, 2013.
4. O. Dobrovolskiy, H. Suderow, et al. “Roadmap on Nanoscale Superconductivity for Quantum Technologies”, Supercond. Science and Technology, 2025.

Магнитная подвеска транспорта (магнитная левитация, MagLev), $V > 500$ км/час (Япония, Китай)



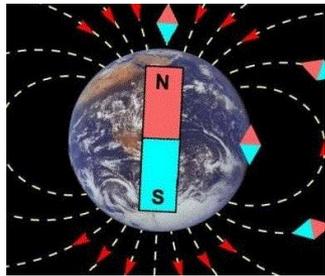
Representative HTS Maglev vehicles in (a) China, (b) Germany and (c) Brazil.

❖ СКВИД-магнитометры и градиометры:

❑ Контроль хим. реакций по и

❑ Магнито-кардиография

❑ Магнито-энцефалография



Изменения вариаций магнитного поля (земного) в окружающем пространстве

Сканирующий сквид-микроскоп
(контроль дефектов в металлах (шасси) и др.)



Детекторы металлических предметов



105 mm 76 mm 2.75 in 57 mm 81 mm 40 mm

Детекторы залежей металлических руд
(с автотранспорта, с вертолета)



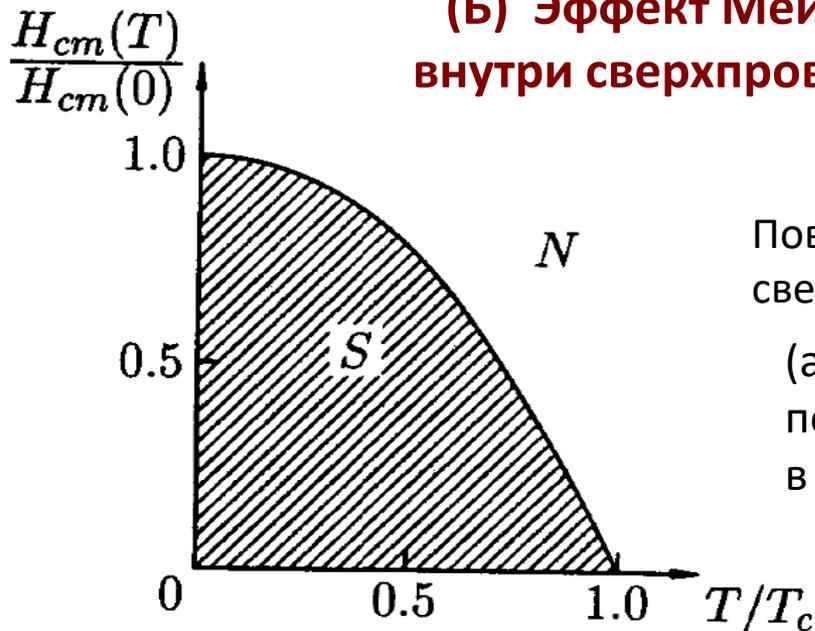
Введение.

Открытие сверхпроводимости. Основные даты

1911 г. – открытие сверхпроводимости в Голландии в Лейденской лаборатории: Камерлинг-Оннес, обнаружил сверхпроводимость ртути при температуре ниже 4 К: $\rho = 0$

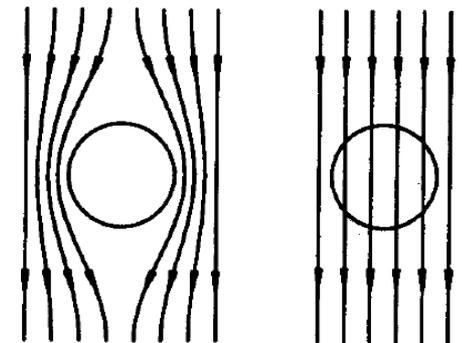
(А) В настоящее время показано, что **сопротивление** сверхпроводников **на постоянном токе отсутствует** на уровне 10^{-24} Ом·см. При температуре 4,2 К удельное сопротивление чистой меди $\sim 10^{-9}$ Ом·см.

(Б) Эффект Мейсснера-Оксенфельда (1933 г.): $B = 0$ всегда внутри сверхпроводника. Таким образом, в сверхпроводнике:
 $\rho = 0$ и $B = 0$



Поведение идеального проводника (таким считался сверхпроводник до 1933 г.):

(а) внесенного в магнитное поле и (б) «замороженного» в поле



Термодинамика сверхпроводников (1 рода)

$$B = \mu_0(H + M) = \mu_0(H + \kappa H) = \mu_r \mu_0 H$$

Магнитный момент единицы объема (при $H_0 < H_{cm}$): $M = -H_0$ ($\mu_r = 0$)

Энергия магнитного момента \mathbf{p} во внешнем поле \mathbf{B}_0 : $W = -(\mathbf{pB}_0)$

При изменении поля от 0 до H_0 источником совершается работа:
$$-\int_0^{B_0} M dB_0 = \frac{1}{2} \mu_0 H_0^2$$

Если плотность свободной энергии сверхпроводника в отсутствие магнитного F_{s0} , то плотность свободной энергии в присутствии магнитного поля будет равна

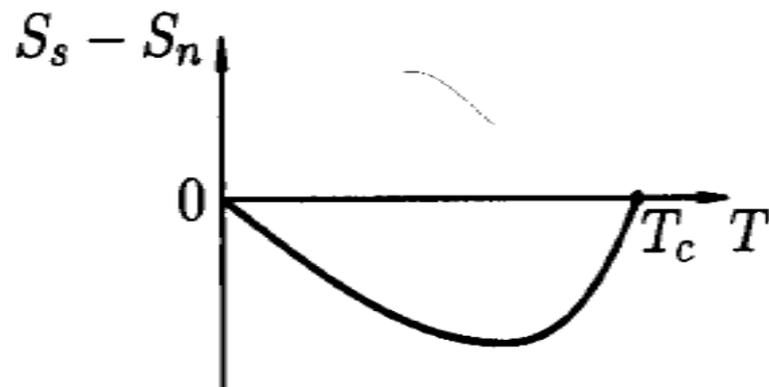
$$F_{sH} = F_{s0} + m_0 H_0^2 / 2$$

Переход в нормальное состояние произойдет тогда, когда плотность свободной энергии сверхпроводника поднимется до значения плотности свободной энергии нормального металла. Это значит, что

$$F_n - F_{s0} = m_0 H_{cm}^2 / 2$$

Поле H_{cm} называют также критическим термодинамическим полем., которое характеризует уменьшение энергии за счет уменьшения энтропии

Разность энтропии в сверхпроводящем и нормальном состояниях:



ВЫВОДЫ:

1. Сверхпроводящее состояние является более упорядоченным, с меньшим значением энтропии;
2. Фазовый переход при $T = T_c$ является фазовым переходом 2-го рода (без поглощения или выделения скрытой теплоты, т. к. $S_s = S_n$);
3. При $T < T_c$ переход из S-состояния в N-состояние происходит под действием магнитного поля. Поскольку при этом $S_s < S_n$, то при переходе происходит поглощение скрытой теплоты перехода. При обратном переходе скрытая теплота выделяется. Это фазовый переход 1-го рода.

$$dQ = T dS,$$

Критические температуры элементов и соединений

Элемент	T_c , К	$H_{cm}(0)$, Э
Al	1.175 ± 0.002	104.9 ± 0.3
Be	0.026	
Cd	0.517 ± 0.002	28 ± 1
Ga	1.083 ± 0.001	59.2 ± 0.3
Hf	0.128	
Hg (α)	4.154 ± 0.001	411 ± 2
Hg (β)	3.949	339
In	3.408 ± 0.001	281.5 ± 2
Ir	0.1125 ± 0.001	16 ± 0.05
La (α)	4.88 ± 0.02	800 ± 10
La (β)	6.00 ± 0.1	1096, 1600
Lu	0.1	< 400
Mo	0.915 ± 0.005	96 ± 3
Nb	9.25 ± 0.02	2060 ± 50
Os	0.66 ± 0.03	70
Pa	1.4	
Pb	7.196 ± 0.006	803 ± 1
Re	1.697 ± 0.006	200 ± 5
Ru	0.49 ± 0.015	69 ± 2
Sn	3.722 ± 0.001	305 ± 2

Элемент	T_c , К	$H_{cm}(0)$, Э
Ta	4.47 ± 0.04	829 ± 6
Tc	7.8 ± 0.01	1410
Th	1.38 ± 0.02	160 ± 3
Ti	0.40 ± 0.04	56
Tl	2.38 ± 0.04	178 ± 5
V	5.40 ± 0.05	1408
W	0.0154 ± 0.0005	1.15 ± 0.03
Zn	0.850 ± 0.01	54 ± 0.3
Zr	0.61 ± 0.15	47

Соединение	T_c , К
Nb ₃ Sn	18.1
(Nb ₃ Al) ₄ + Nb ₃ Ge	20
La _{0.925} Sr _{0.075} CuO ₄	34
YBa ₂ Cu ₃ O ₇	92.4
Bi ₂ Sr ₂ Ca ₂ Cu ₃ O ₁₀	111
Tl ₂ Sr ₂ Ca ₂ Cu ₃ O ₁₀	123
HgBa ₂ Ca ₂ Cu ₃ O ₈	133

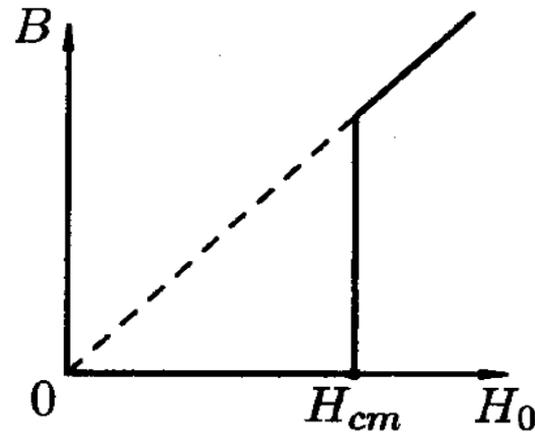
Основные даты

(красным цветом выделены Нобелевские премии)

- 1911** г. - Открытие сверхпроводимости (Камерлинг-Оннес, Лейденская лаборатория, Голландия)
- 1933** г. - Эффект Мейснерв - Оксенфельда ($\rho = 0$, $B = 0$)
- 1935** г. – Теория Лондонов (феноменологическая)
- 1940**-е гг. – Лондоновская теория и изучение промежуточного состояния
- 1950** г. – Теория Гинзбурга – Ландау (феноменологическая, с учетом квантовых свойств)
- 1957** г. – Теория Бардина, Купера, Шриффера (БКШ)
- 1958** г. – Матем. метод Н.Н. Боголюбова, работы Л.П. Горькова (решение модельной задачи БКШ с помощью функций Грина)
- 1961** г. – Экспериментальное обнаружение квантования потока магнитного поля
- 1962** г. – Теоретическое предсказание эффекта Джозефсона
- 1964** г. – Экспериментальное наблюдение джозефсоновской генерации (И.Л.Янсон, В.М. Свистунов, И.М. Дмитренко)
- 1986** г. – Открытие ВТСП - высокотемпературных сверхпроводников (J.G. Bednorz, K.A. Muller)

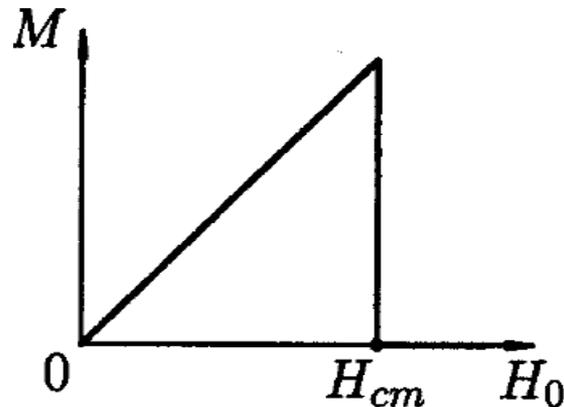
Сверхпроводники 1-го рода

Индукция магнитного поля B внутри массивного сверхпроводника, находящегося во внешнем поле H_0



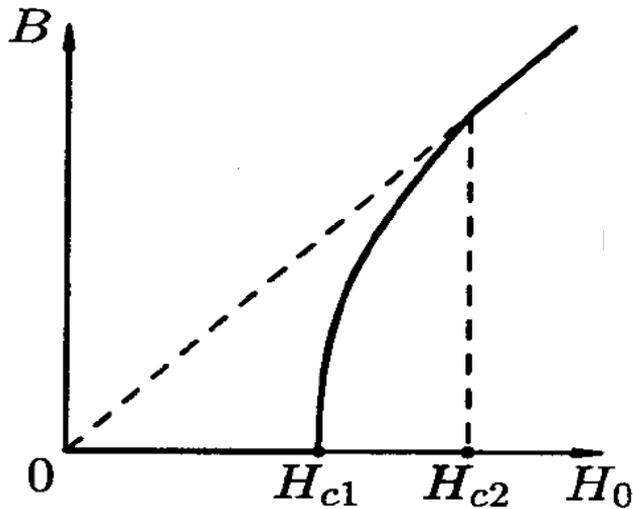
H_0 – внешнее поле,
 B – поле внутри СП

Намагниченность сверхпроводника противоположно внешнему полю H_0 :

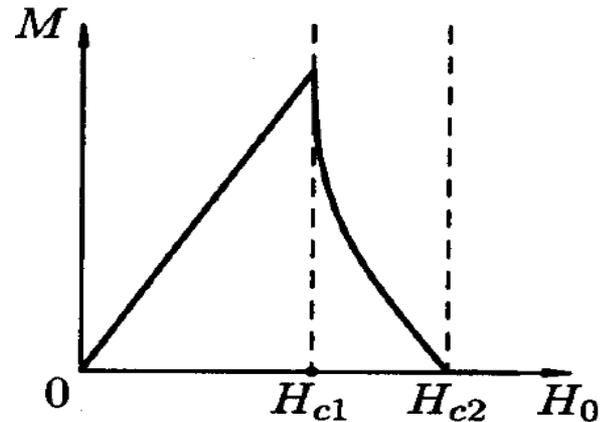


$$B = \mu_0(H_0 - M)$$

Сверхпроводники 2-го рода



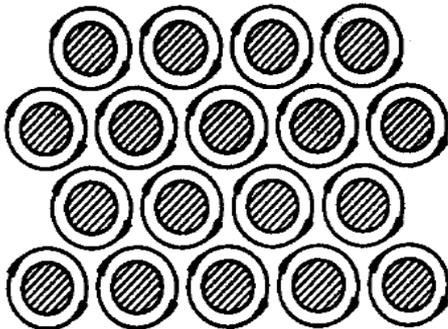
H_0 – внешнее поле,
 B – поле внутри СП



$$H_{c1} < H_{cm} < H_{c2}$$

$$F_n - F_{s0} = m_0 H_{cm}^2 / 2$$

Смешанное состояние ($H_{c1} < H_0 < H_{c2}$) сверхпроводника 2-го рода



Магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости, заштрихованы нормальные области (керна) абрикосовских вихрей, образующих треугольную решетку. Поток внутри каждого вихря составляет квант $\Phi_0 = h/(2e) = 2,05 \cdot 10^{-15}$ Вб

Уравнения Максвелла

$$\begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{D} = \rho & \int \vec{D} d\vec{S} = q \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 & \int \vec{B} d\vec{S} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -dB/dt & \varepsilon \equiv \oint E dl = -d\Phi/dt \\ \operatorname{rot} \vec{H} = j + dD/dt & \oint H dl = I + I_D \end{array}$$

Материальные уравнения:

$$\vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{D} \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}} \quad \text{- закон Ома}$$

Линейная электродинамика сверхпроводников.

Теория Лондонов

✧ Первое уравнение Лондонов

Уравнение движения для сверхпроводящих электронов в единичном объеме:

$$n_s m \frac{d\vec{v}_s}{dt} = n_s e \vec{E}, \quad \text{плотность сверхтока} \quad \vec{j}_s = n_s e \vec{v}_s. \quad \text{Отсюда получаем:}$$

$$\Lambda \frac{d}{dt} \vec{j}_s = \vec{E}$$

$$\Lambda = \frac{m}{n_s e^2} \square \frac{2m}{\square n_s / 2 \square \square 2e \square^2} = m_0 / 2$$

✧ Второе уравнение Лондонов

$$\Lambda \cdot \text{rot}(\vec{j}_s) = -\vec{B}$$

Обобщенное уравнение:

$$\Lambda \cdot \vec{j}_s = -\vec{A}$$

$$\vec{A} \text{ – вектор - потенциал} \quad \vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

Ур. Максвелла + ур. Лондонов дают уравнения для тока, поля и векторного потенциала:

$$\text{rot rot } \vec{B} = [\nabla[\nabla \vec{B}]] = \nabla(\nabla \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \nabla(\text{div } \vec{B}) - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B} \rightarrow$$

$$\Delta \vec{j}_s = \frac{1}{\lambda^2} \vec{j}_s$$

$$\Delta \vec{A} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{A}$$

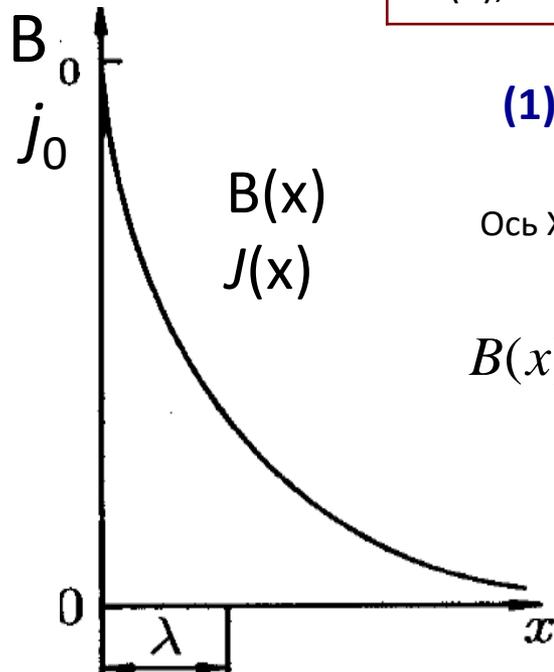
$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}$$

$$l = \sqrt{\frac{m}{m_0 n_s e^2}}$$

$$l(T) = l(0) / \sqrt{1 - (T/T_c)^4}$$

$$T = 0, n_s = n \gg 10^{22} \text{ cm}^{-3} \quad \text{и} \quad l(0) \gg 60 \text{ nm}$$

Элемент	Al	Cd	Hg	In	Nb	Pb	Sn	Tl
$\lambda(0), \text{ \AA}$	500	1300	380-450, аниз.	640	470	390	510	920



(1) Пластина (толстый цилиндр) в параллельном поле

(2) Пластина (толстый цилиндр) с током

Ось X перпендикулярна поверхности и направлена внутрь сверхпроводника

Решение:

$$B(x) = B_1 e^{-x/l} + B_2 e^{+x/l} \quad \text{or} \quad B_1 \text{ch}(x/l) + B_2 \text{sh}(x/l)$$

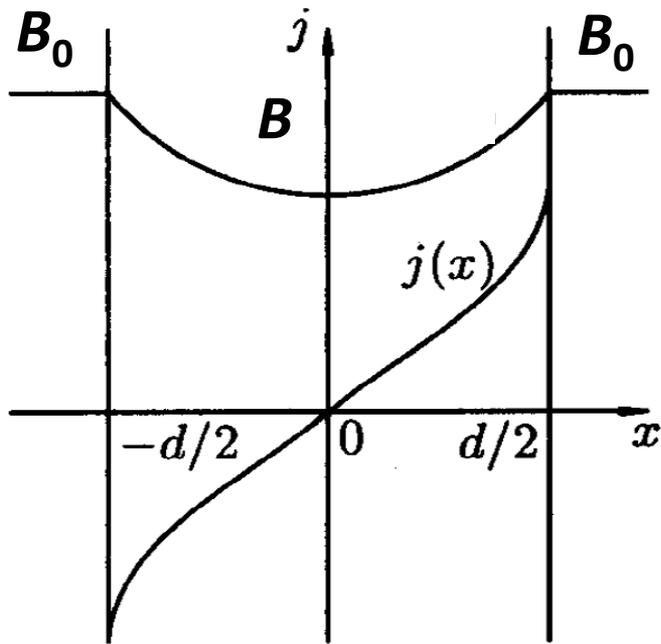
$$\mu_0 \vec{j}_s = \text{rot}(\vec{B}) \Rightarrow j_s = -\mu_0^{-1} dB/dx$$

Гран. условия: (1) $B(\pm d/2) = B_0$; $B(R_0) = B_0$

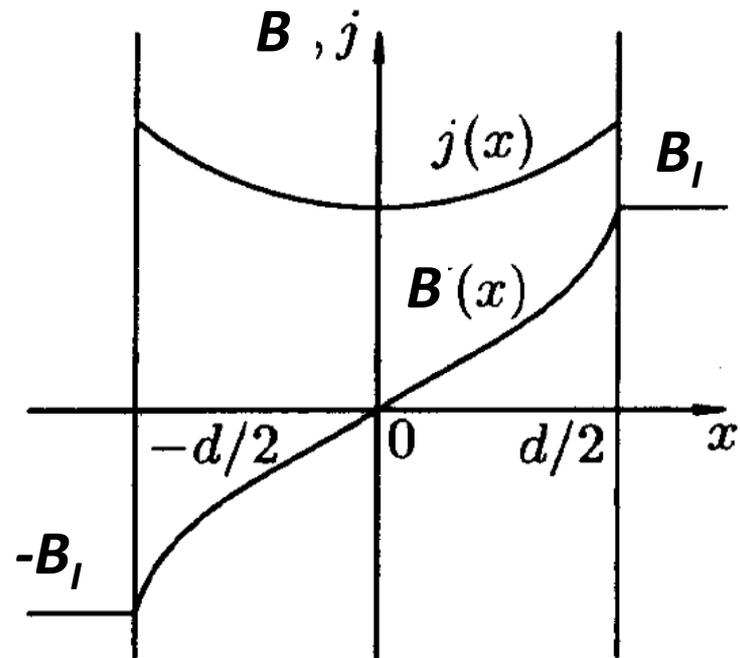
(2) $I = \int j(x) dx = I_0$.

Распределение плотности тока и магнитного поля в тонкой широкой сверхпроводящей пластине:

- (1) помещенной в однородное поле B_0 , параллельное пластине,
(2) в случае пропускания по ней транспортного тока.



$$sh(x) = (e^x - e^{-x})/2$$



$$ch(x) = (e^x + e^{-x})/2$$

Квантовое обобщение уравнения Лондонов

Волновая функция конденсата сверхпроводящих электронов $\Psi = |\Psi|e^{i\theta}$

Комплексное число:

$$\Psi = a + ib = |\Psi|e^{i\theta}$$

$$i^2 = -1$$

Формула Эйлера:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

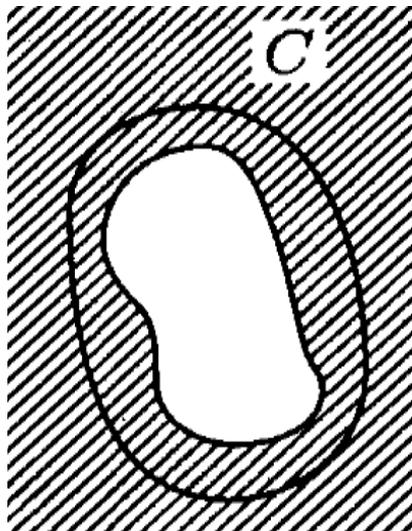
$$\vec{j}_s = \frac{1}{\Lambda} \left[\frac{\hbar}{2e} \vec{\nabla}\theta - \vec{A} \right] = \frac{1}{\Lambda} \left[\frac{\Phi_0}{2\pi} \vec{\nabla}\theta - \vec{A} \right]$$

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$$

$$\text{rot}(\vec{\nabla}\theta) = 0$$

$$\Phi_0 = h/(2e) = 2.07 \times 10^{-15} \text{Wb} \quad \text{- квант магнитного потока}$$

Квантование магнитного потока



В сплошном сверхпроводнике (заштриховано) имеется цилиндрическая полость. Контур C проходит всюду внутри сверхпроводника на больших по сравнению с λ расстояниях от границы полости.

При охлаждении сверхпроводника в магнитном поле до температуры ниже критической происходит вытеснение магнитного поля из сверхпроводника, а в полости будет заморожен некоторый магнитный поток (равный целому числу квантов). Этот поток будет создаваться сверхтоком, возникающим на внутренней поверхности полости.

$$\vec{j}_s = \frac{1}{\Lambda} \left[\frac{\Phi_0}{2\pi} \vec{\nabla} \theta - \vec{A} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Phi_0}{2\pi} \oint_C \vec{\nabla} \theta d\vec{l} = \frac{\Phi_0}{2\pi} 2\pi n = \oint_C \vec{A} d\vec{l} = \Phi \Rightarrow n\Phi_0$$

$$\Phi_0 = h/(2e) = 2.07 \times 10^{-15} \text{ Wb}$$

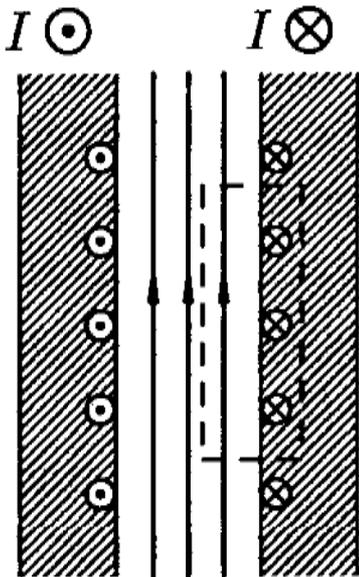
Кинетическая индуктивность

Индуктивность участка цепи (или контура) может быть определена через энергию, возникающую при протекании тока по данному участку цепи (контур):

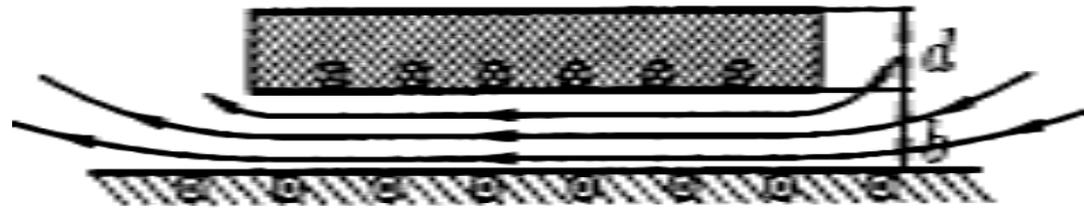
$$LI^2/2 = \frac{1}{2m_0} \int B^2 dV + \int n \left(mv^2/2 \right) dV = L_m I^2/2 + L_k I^2/2$$

$$L_{k\grave{a}} = \frac{m_0}{2} l$$

Кинетическая индуктивность на квадрат поверхности, равная магнитной индуктивности на квадрат, учитывающей поле внутри сверхпроводника



Если в параллельных сверхпроводящих пластинах текут равные и противоположные токи, то магнитное поле этих токов будет «заперто» между пластинами.

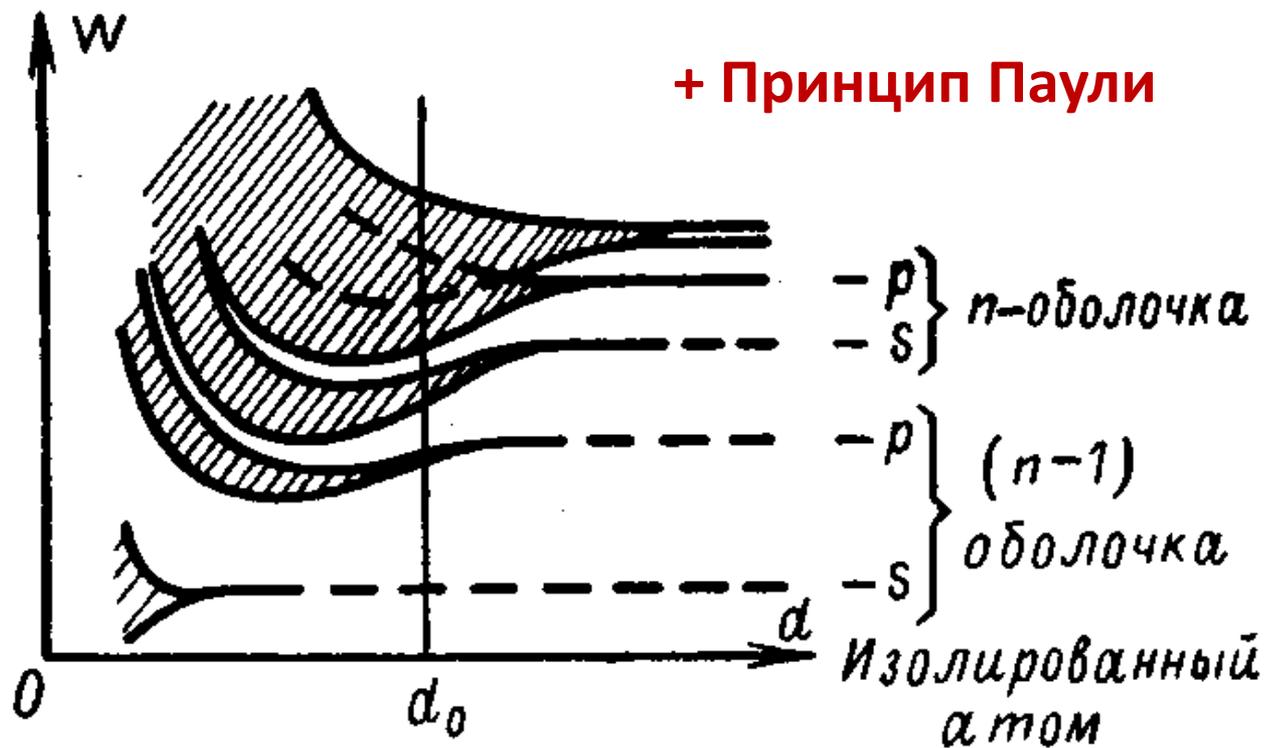


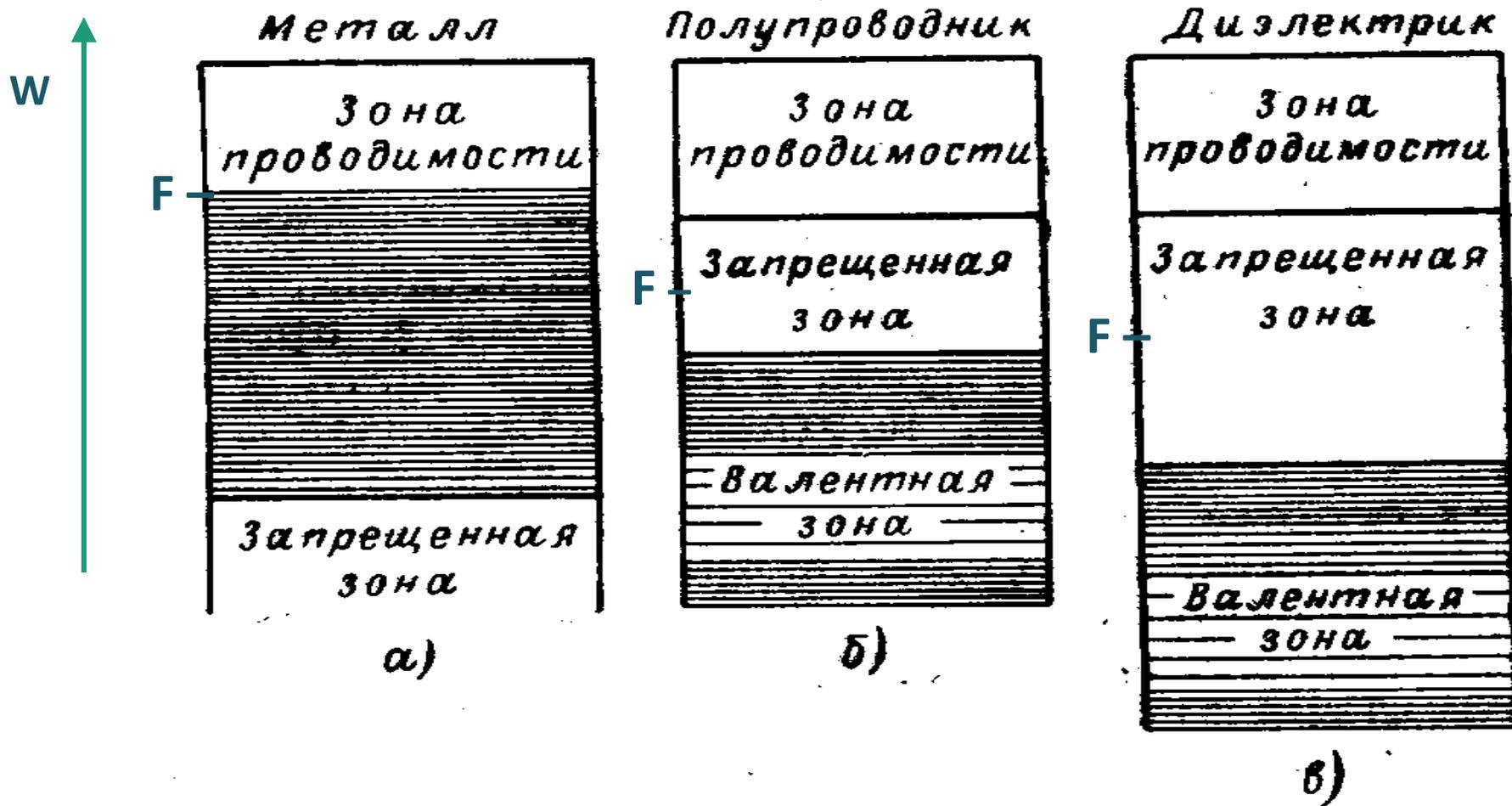
Полоска сверхпроводника над экраном

$$L_{\square} = m_0 (l_1 + l_2 + b) \rightarrow m_0 (2l + b)$$

Формирование энергетических зон в твердых телах

Формирование энергетических зон (энергии электронов) в твердом теле при сближении атомов от состояния совокупности далеко отстоящих друг от друга отдельных атомов

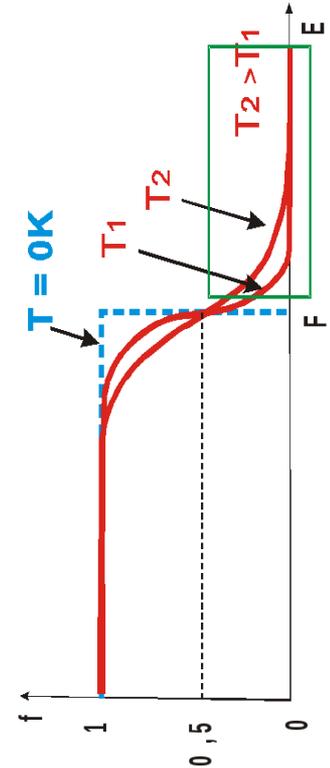
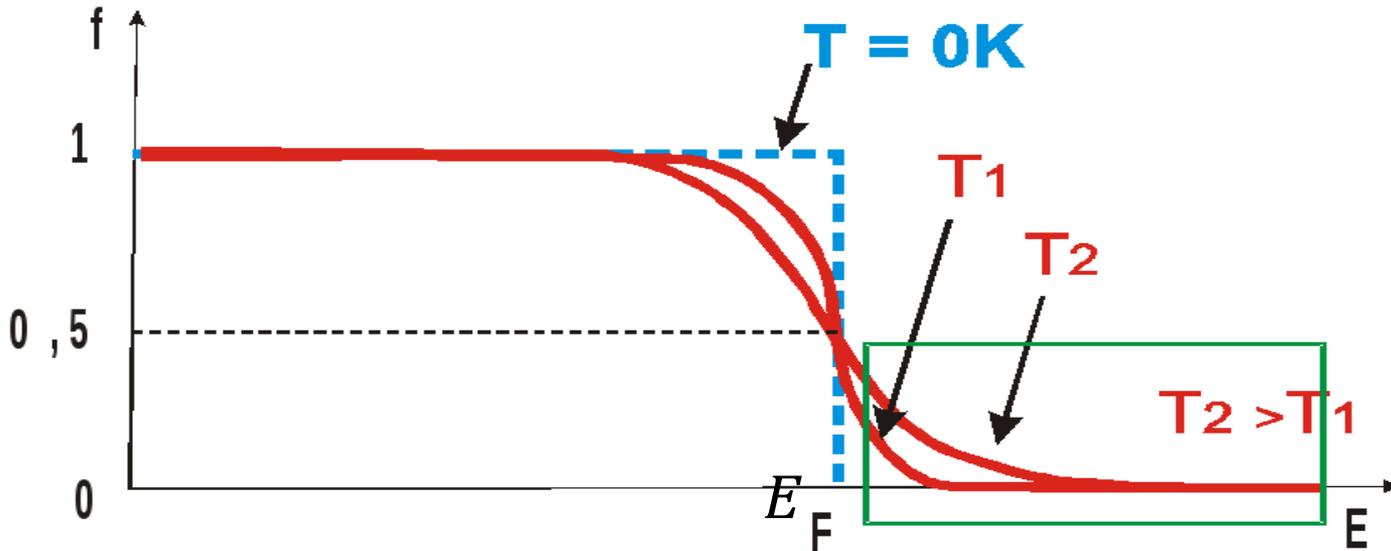




Зонная структура при $T = 0$.

(а) – металл, (б) – полупроводник, (в) – диэлектрик.

Распределение Ферми – Дирака (для фермионов)



$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}$$

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$

Корпускулярно-волновой дуализм:

$$k = 2\pi/\lambda$$

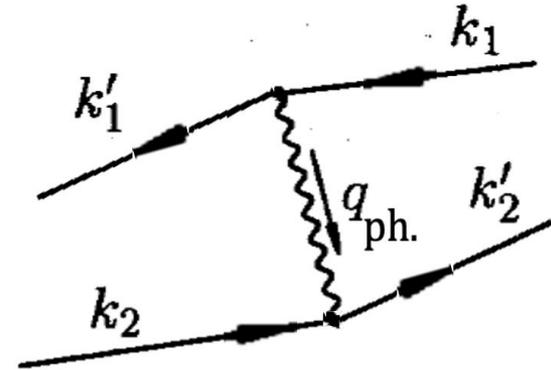
λ – длина волны

Теория сверхпроводимости БКШ (Бардин, Купер, Шриффер)

Электрон – фононное взаимодействие

Притяжение электронов (через решетку):

$$\begin{aligned}\vec{k}_1 &= \vec{k}'_1 + \vec{q}_{ph} \\ \vec{k}_2 &= \vec{k}'_2 - \vec{q}_{ph}\end{aligned} \Rightarrow \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}'_1 + \vec{k}'_2$$



Импульс электрона $\vec{p} = \hbar\vec{k}$

Энергия фонона $\varepsilon_q = \hbar\omega < \hbar\omega_D$

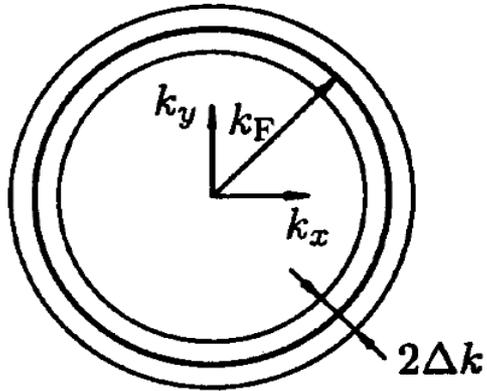
ω_D - частота Дебая (максимальная частота колебаний решетки)

Два взаимодействующих электрона притягиваются к общему месту с положительным зарядом (где заряд ионов не скомпенсирован полностью зарядом электронов)

В БКШ теории:

электроны, энергия которых отличается от энергии электрона на поверхности Ферми не более, чем на величину $\hbar\omega_D$, притягиваются друг к другу. Энергия их взаимодействия равна $-V$. Все остальные электроны не взаимодействуют.

Матричный элемент взаимодействия электронов:

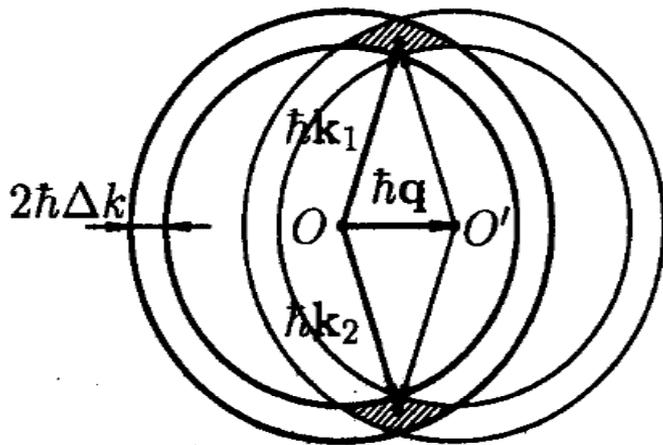


$$V_{kk'} = \begin{cases} -V, & |\bar{\epsilon}_k - \epsilon_F| \leq \hbar\omega_D \text{ \& } |\bar{\epsilon}_{k'} - \epsilon_F| \leq \hbar\omega_D, \\ 0, & |\bar{\epsilon}_k - \epsilon_F| > \hbar\omega_D \text{ or } |\bar{\epsilon}_{k'} - \epsilon_F| > \hbar\omega_D. \end{cases}$$

$$2\Delta k \quad \Delta k / k_F \sim \hbar\omega_D / \epsilon_F, \quad \epsilon_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m - \text{энергия Ферми}$$

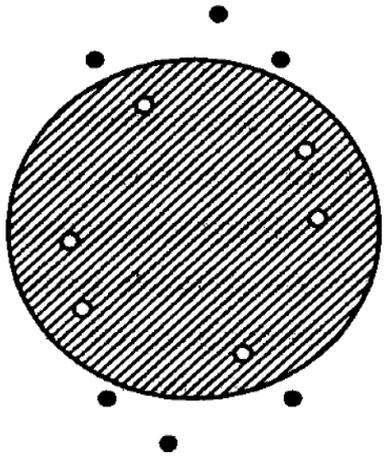
В модели БКШ притягиваются только электроны, лежащие в узком сферическом слое около поверхности Ферми, толщина которого $2\Delta k$ соответствует дебаевской энергии:

Как направлены векторы k электронов в паре??



Если спариваются электроны имеющие суммарный импульс $\hbar\mathbf{q}$, то во взаимодействии участвуют лишь те электроны, которые заполняют заштрихованную часть k -пространства (получающуюся от пересечения слоев, сдвинутых на $\hbar\mathbf{q}$) как геометрическое место положения вершин векторов, дающих в сумме вектор $\hbar\mathbf{q}$. При $\mathbf{q} = 0$, **участвуют все электроны** в $2\Delta k$ – слое, что соответствует рассеянию пары электронов $(k, -k)$ в состояние $(k', -k')$.

Итак, $(k, -k) \rightarrow (k', -k') \rightarrow \dots$ и т.д.



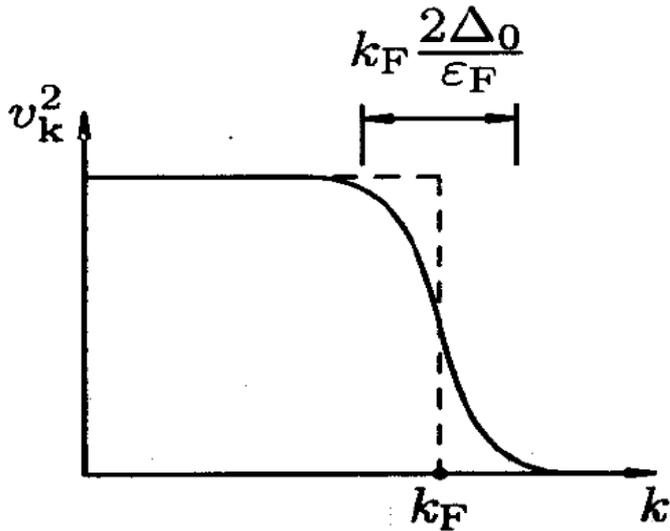
ИТАК, взаимодействуют электроны с противоположными спинами, так как электроны с одинаковыми спинами не могут оказаться в одной точке (с учетом соотношения неопределенностей), поэтому их притяжение за счет обмена фононами намного слабее)

⇐ Схематическое изображение состояния, полная энергия которого может оказаться меньше энергии состояния, в котором все ячейки k-пространства под сферой Ферми заняты, а над ней – свободны.

Минимизация энергии дает распределение электронов:

v_k^2 - функция, описывающая вероятность того, что пара состояний $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ занята.

$u_k^2 = 1 - v_k^2$ - вероятность того, что пара состояний $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ свободна.



$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - e_k / E_k \right)$$

$$E_k = \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_0^2} \quad \Delta_0 = V \sum v_k u_k$$

(!) Энергия уменьшается:

$$\Delta E_{\text{кин}} + (-\Delta E_{\text{пот}}) < 0$$

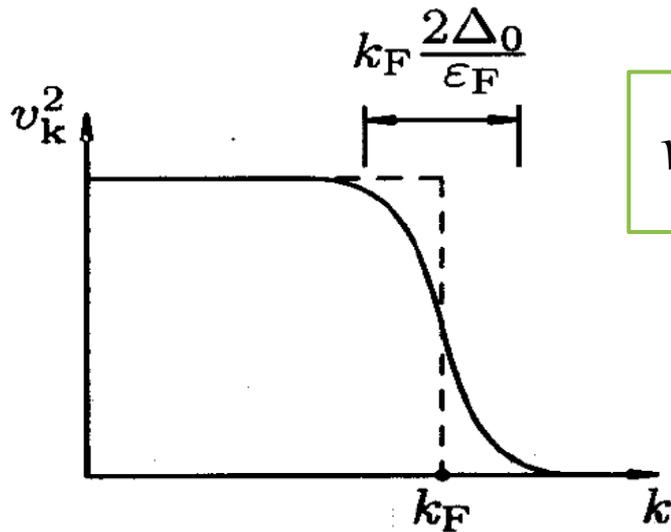
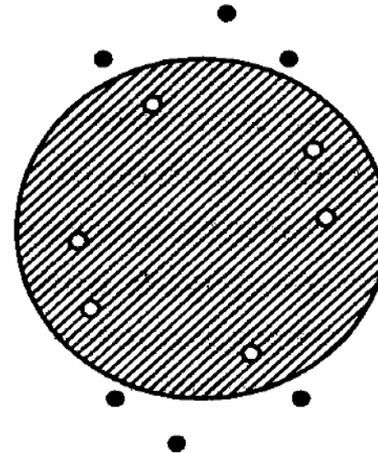
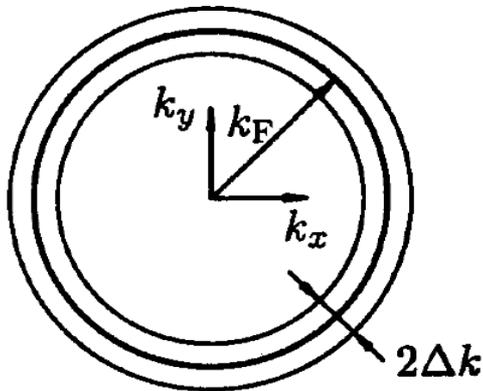
$$W_S - W_N = \Delta W = -\frac{1}{2} N(0) \Delta_0^2$$

(плотность энергии)

$$N(0) \sim 10^{22} \text{ el} / \text{cm}^3 / 10 \text{ eV} (\text{cond. band}) \sim 6 \times 10^{45} \text{ el} \times \text{m}^{-3} \text{ J}^{-1}$$

Резюме: сверхпроводник при $T = 0$

$$E = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$$



$$v_k^2 = \frac{1}{2} (1 - e_k / E_k) \quad \leftarrow (\vec{k}, -\vec{k})$$

$$E_k = \sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_0^2} \quad \Delta_0 = V \sum v_k u_k$$

(!) Энергия уменьшается:
 $\Delta E_{\text{кин}} + (-\Delta E_{\text{пот}}) < 0$

Бозе-конденсат куперовских пар

(«сверхпроводящие» электроны в энергетическом слое вокруг уровня Ферми)

- ❖ Состояние непрерывного перераспределения «сверхпроводящих» электронов друг на друге (непрерывные акты взаимодействия через решетку с разными «партнерами»

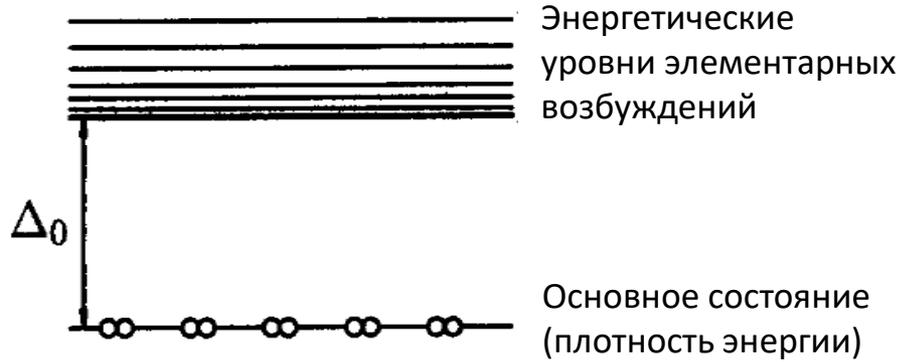
$$\rightarrow (\vec{k}, -\vec{k}) \rightarrow (0, 0) \rightarrow \dots \dots$$

- ❖ Куперовские пары – бозе-частицы (спин = 0) – могут быть в одном и том же состоянии (не действует принцип Паули для фермионов)
- ❖ Размер куперовской пары может достигать 1 мкм (десятки рядов решетки) – волновые функции сильно перекрыты пространственно, что ведет к синхронизации волновых функций пар и образованию единой волновой функции

Бозе-конденсат куперовских пар – когерентный конденсат, описываемый единой волновой функцией $\Psi = |\Psi|e^{i\theta}$

Когерентность конденсата пар  макроскопические квантовые эффекты

Спектр элементарных возбуждений сверхпроводника

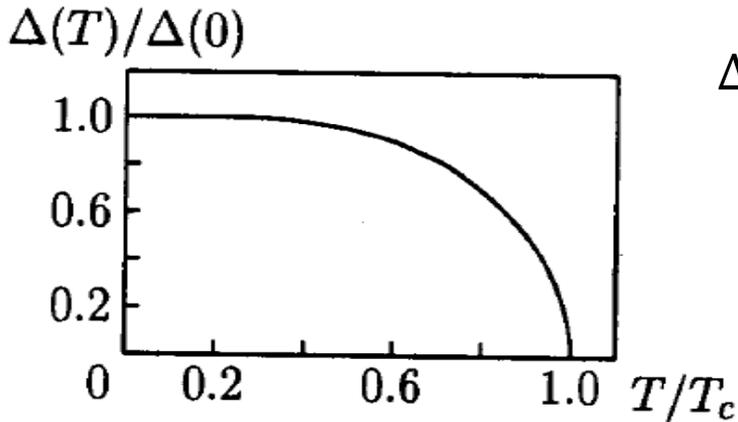


“Разрушаем” одну из ячеек:

или (i) помещаем электрон с импульсом k в пустую ячейку, или забираем электрон с импульсом k из занятой ячейки ($k, -k$).

→ $E_q = \sqrt{e_q^2 + D_0^2}$ - увеличение энергии

Энергетическая щель:



$$\Delta_0 = \Delta(0) = V \sum v_k u_k$$

$$2D_0 = 3.52k_B T_c$$

$$\Delta W = -\frac{1}{2} N(0) \Delta_0^2 \quad \text{— Уменьшение плотн. энергии в S-состоянии}$$

$$N(0) \sim 10^{22} \text{ el/cm}^3 / 10 \text{ eV (cond. band)} \sim 6 \times 10^{45} \text{ el} \times \text{m}^{-3} \text{J}^{-1}$$

Оценим величину D_0 . Дебаевская энергия $\hbar\omega_D \sim 100\text{K}$, $N(0)V \sim 0.3$, $\Rightarrow \Delta_0 \sim 4\text{K}$

(Энергия выражена в кельвинах. Переход к энергии в джоулях – умножение на k_B)

Квазичастицы нормальном металле и сверхпроводнике: электроны и дырки

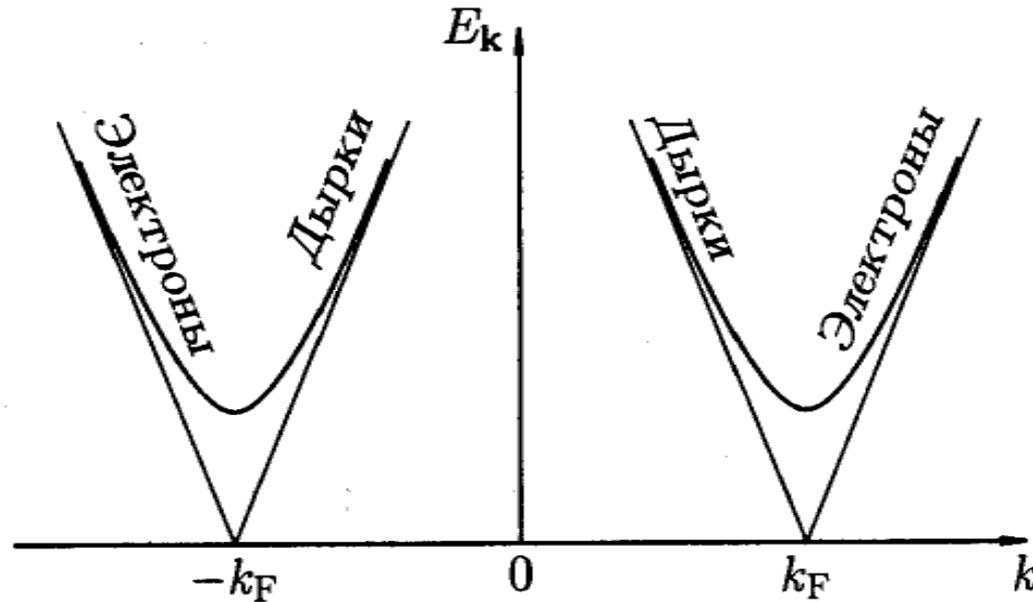


Рис. 52.1. Энергетический спектр частиц в сверхпроводнике. Тонкими прямыми линиями показан спектр нормального металла.

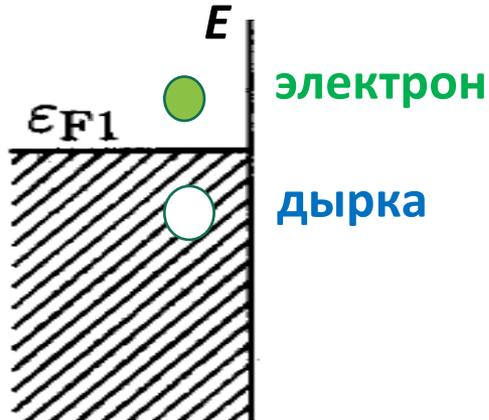
Групповая скорость определяет направление тока:

$$\mathbf{s}_k = \frac{dE_k}{d\mathbf{p}_k} = \frac{1}{\hbar} \frac{dE_k}{dk}$$

Энергетический спектр квазичастиц в сверхпроводнике

$T = 0$

Металл

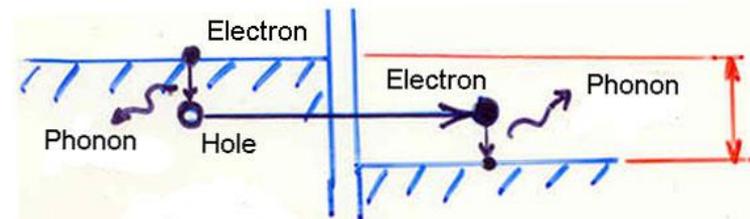
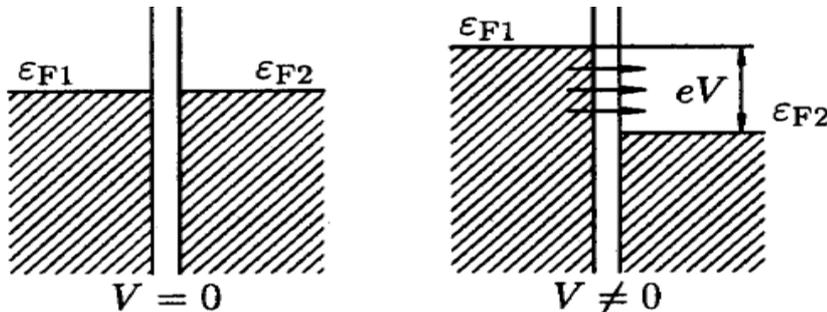


Сверхпроводник



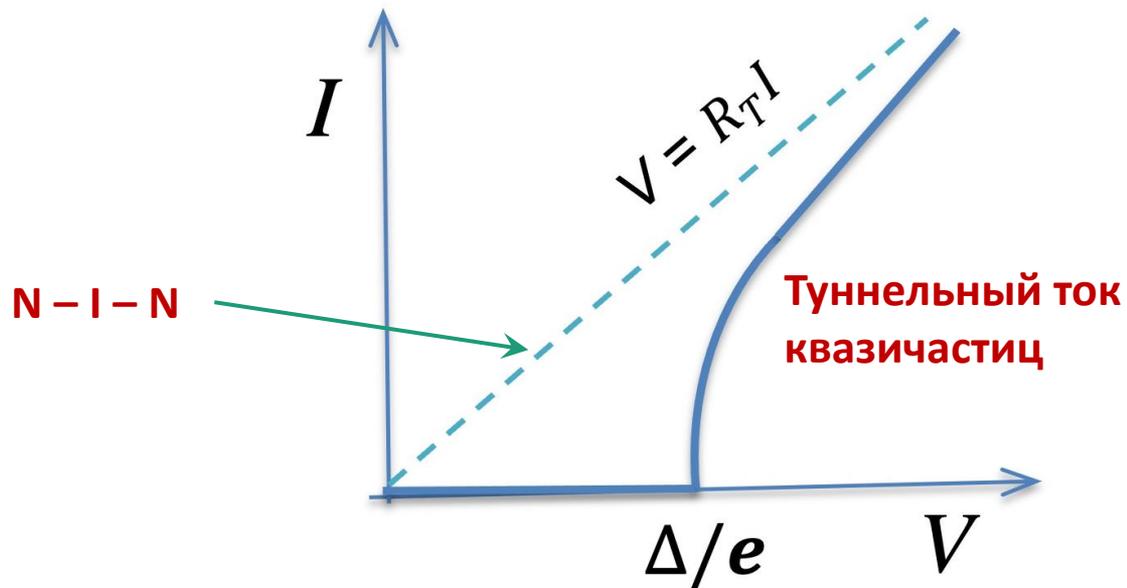
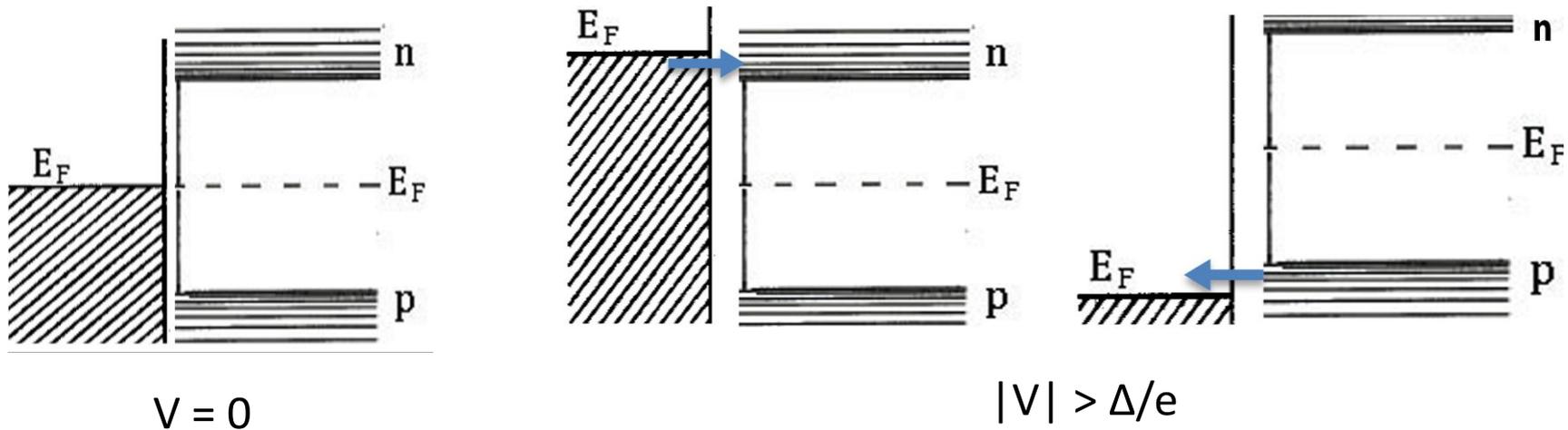
Полупроводниковая модель спектра электронных и дырочных возбуждений в сверхпроводнике.

Туннелирование из N в N: $I = V/R_T$

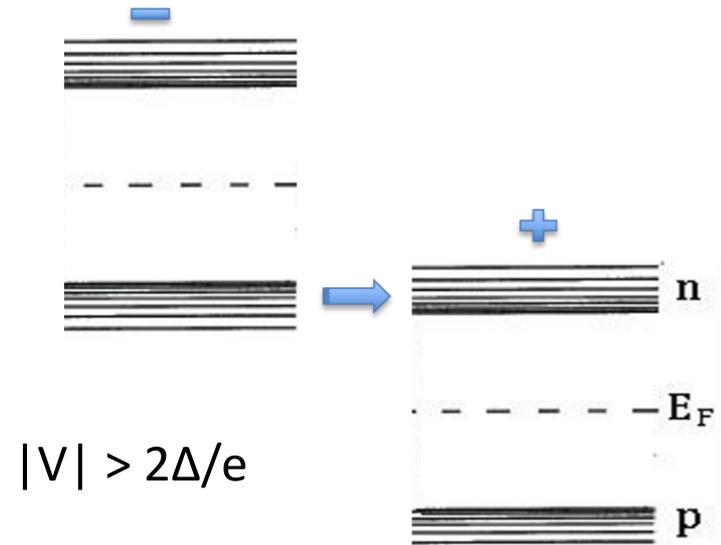
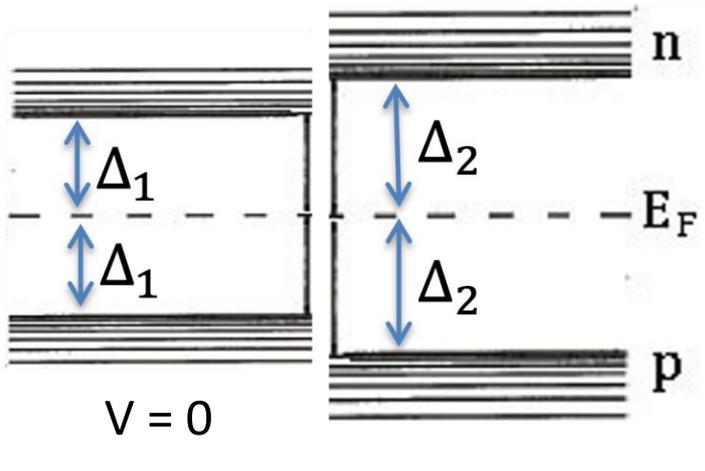


Энергетическая диаграмма для туннельного контакта двух нормальных металлов (N-I-N структура) при нулевой температуре ($T = 0$), в случаях $V = 0$ (а) и $V \neq 0$ (б), а также схематическое объяснение диссипации энергии при одном акте туннелирования (с).

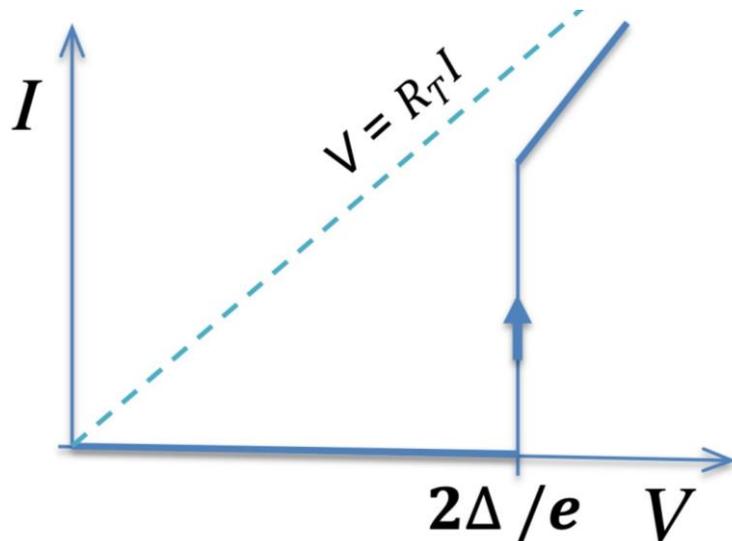
Туннелирование квазичастиц в N – I – S структуре



Туннелирование квазичастиц в S – I – S структуре



Туннельный ток квазичастиц



Сверхпроводящий ток в эффекте Джозефсона:

Туннелирование куперовских пар (сверхпроводящий ток) в джозефсоновском переходе описывается туннелированием волнового поля (волновой функции конденсата куперовских пар)

Уравнение Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi$$

Стационарное состояние:

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = 0$$

Если система **НЕ** находится в переменном внешнем поле, то гамильтониан не зависит явно от времени, тогда возможно разделение переменных:

$$y(x, t) = j(x) f(t) \rightarrow \hat{H} y(x, t) = f(t) \hat{H} j(x)$$

$$\hat{H} j_E(x) = E j_E(x)$$

$$i\hbar \frac{\partial f(t)}{\partial t} = E f(t) \rightarrow f(t) = e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$$

$$\psi(\xi, t) = \varphi_E(\xi) \cdot e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$$

В основу теории ГЛ положена разработанная Л.Д.Ландау теория фазовых переходов второго рода. Согласно этой теории, фазовый переход 2 рода – это такой переход, при котором состояние тела иеняется непрерывно, а его симметрия – скачком. Сверхпроводящее состояние является более упорядоченным и должно описываться параметром порядка, который отличен от нуля при $T < T_c$ и обращается в нуль при $T \geq T_c$. В качестве параметра порядка рассматривается волновая функция сверхпроводящих электронов $\Psi(\mathbf{r})$, квадрат модуля которой описывает плотность куперовских пар электронов:

$$|\Psi(\vec{r})|^2 = n_s/2$$

Рассмотрим однородный сверхпроводник без магнитного поля. Тогда волновая функция не зависит от пространственных координат, и разложение плотности свободной энергии F_{s0} (в отсутствие поля) по степеням квадрата модуля волновой функции вблизи T_c , с учетом первых двух членов:

$$F_{so} = F_n + a|Y|^2 + \frac{b}{2}|Y|^4, \quad \text{Энергия изменяется за счет изменения энтропии при фазовом переходе.}$$

где F_n – плотность свободной энергии тела в нормальном состоянии, a и b – некоторые феноменологические параметры разложения. Найдем значение квадрата модуля параметра порядка, при котором свободная энергия однородного сверхпроводника достигает минимума:

$$dF_{so}/d|Y|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |Y|^2 = -a/b \quad \Leftrightarrow \quad F_n - F_{s0} = m_0 H_{cm}^2 / 2 = a^2 / (2b)$$

Желаемое поведение параметра порядка достигается при следующих условиях:

$$\beta = const > 0, \quad \alpha = \tilde{\alpha}(T - T_c), \quad \tilde{\alpha} = const > 0.$$

Плотность энергии Гиббса

Для описания равновесного термодинамического состояния системы в присутствии электромагнитного поля необходимо использовать потенциал Гиббса.

Плотность кинетической энергии частицы с массой m в квантовой механике $\left| -i\hbar\nabla\Psi \right|^2 / (2m)$

В случае, когда частица имеет заряд e и движется в поле векторного потенциала \mathbf{A} , необходимо использовать обобщенное выражение для оператора импульса: $\hat{p} = -i\hbar\nabla - e\vec{A}$

Пусть \mathbf{H}_0 – напряженность однородного магнитного поля, в котором находится сверхпроводник, а \mathbf{B} – индукция магнитного поля в рассматриваемой точке сверхпроводника, тогда плотность энергии Гиббса сверхпроводника, отсчитанная от ее величины в нормальном состоянии, можно записать в следующем виде:

$$G_{sH} = F_{n0} + \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{2(2m)} \left| -i\hbar\nabla\Psi - 2e\vec{A}\Psi \right|^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} - \vec{B}\vec{H}_0$$

Уравнения Гинзбурга-Ландау

Энергия Гиббса всего сверхпроводника:

$$\hat{G}_{sH} = \hat{F}_{n0} + \int \left[\alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{2(2m)} \left| -i\hbar\nabla\Psi - 2e\vec{A}\Psi \right|^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} - \vec{B}\vec{H}_0 \right] dV$$

Условия, при которых энергия Гиббса минимизируется, дают уравнения ГЛ.

Уравнения ГЛ в безразмерных переменных $\psi = \Psi/\Psi_0$

$$\xi^2 \left(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \vec{A} \right)^2 \psi - \psi + \psi |\psi|^2 = 0$$

Гран. условия: $I = 0$

$$\left[i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \vec{A} \right] \vec{n} \psi = 0 \mapsto i\alpha \psi \text{ (at } SN\text{)}$$

$$\mu_0 j_s = \text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \frac{|\psi|^2}{\lambda^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \vec{A} \right)$$

$$F_0 = h/(2e) \approx 2 \cdot 10^{-15} \text{ Вб}$$

$$\xi^2 = \hbar^2 / (4m|\alpha|)$$

$$m_0 l^2 = \frac{m}{n_s e^2} = \frac{mb}{2e^2 |a|}$$

Градиентная инвариантность теории ГЛ

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \phi, \quad \vec{B} = \text{rot}(\vec{A}) = \text{rot}(\vec{A}')$$

$$U' = U - \partial \phi / \partial t, \quad \vec{E} = -\nabla U - \partial \vec{A} / \partial t$$

$$\psi' = \psi \exp \left(i \frac{2\pi}{\Phi_0} \phi(\vec{r}) \right)$$

Уравнения ГЛ инвариантны

Два характерных масштаба длины в сверхпроводниках: длина когерентности ξ и глубина проникновения λ

Рассмотрим случай, когда на плоскую поверхность сверхпроводника нанесена пленка нормального металла, в результате чего значение параметр порядка $|\psi|$ на поверхности сверхпроводника будет несколько меньше, чем его равновесное значение $|\psi| = 1$ в глубине сверхпроводника. Изменение волновой функции может происходить вдоль оси x , перпендикулярной плоскости поверхности и направленной вглубь сверхпроводника.

В силу того, что фаза волновой функции может быть изменена за счет калибровки векторного потенциала, в односвязном сверхпроводнике волновую функцию ψ можно считать вещественной: $\psi = \psi(x)$, и тогда 1-е уравнение ГЛ принимает следующий вид:

$$-\chi^2 d^2 y / dx^2 - y + y^3 = 0$$

Будем считать, что подавление параметра порядка на поверхности достаточно малое:

$$y = 1 - e(x), \quad e(x) \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \chi^2 d^2 e(x) / dx^2 - 2e(x) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$e(x) = e(0) e^{-x / (\chi / \sqrt{2})}$$

ξ – длина когерентности - характерный масштаб, на котором происходит изменение параметра порядка.

Оба параметра ξ и λ зависят от температуры, т.к. содержат $|\alpha|$, пропорциональный $(T_c - T)$:

$$1/\mu(T_c - T)^{-1/2}, \quad \chi\mu(T_c - T)^{-1/2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = 1/\chi} \quad - \text{параметр ГЛ}$$

Эффект близости на SN границе

Al(1.2 K, 440 nm)+Pb: 7.2K (90 nm), 5.6K (60 nm), 1.6K (20 nm)

Для корректности применимости уравнений ГЛ рассмотрим границу двух сверхпроводников с близкими критическими температурами T_{cs} и T_{cn} при температуре $T_{cn} < T < T_{cs}$, когда материал с меньшей критической температурой, который занимает полупространство $x < 0$, находится в нормальном состоянии, а другой материал, занимающий полупространство $x > 0$, находится в сверхпроводящем состоянии.

S - область ($x > 0$):

$$-x^2 d^2 y / dx^2 - y + y^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2 (dy/dx)^2 - y^2 + y^4 / 2 = C, \quad C = -1/2$$

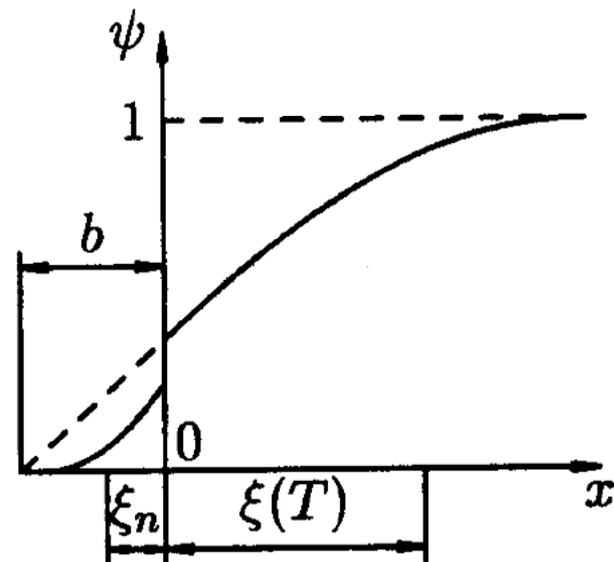
$$y = \operatorname{th} \left[(x - x_0) / \sqrt{2} x \right]$$

N - область ($x < 0$): $\alpha_n > 0$, 1-е ур. ГЛ:

$$-\xi_n^2 (d^2 \psi / dx^2) + \psi + \psi^3 = 0, \quad \xi_n^2 = \hbar^2 / (4m\alpha_n)$$

$$y \ll 1 \quad \Rightarrow \quad -x_n^2 (d^2 y / dx^2) + y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$y = y_0 e^{-|x|/X_n}$$



В чистом металле, $l_n \gg X_n$:

$$\xi_n = \hbar v_F / (2\pi k_B T)$$

В «грязном» металле, $l_n \ll X_n$:

$$\xi_n = \sqrt{\hbar v_F l_n / (6\pi k_B T)}$$

$$X_n \sim (10^{-4}, 10^{-3}) \text{ mm}$$

Энергия границы раздела между N и S фазами

Рассматриваем плоскую границу. Все переменные будут зависеть только от x , начало координат ($x = 0$) выбрано в области границы. Вектор \mathbf{A} можно считать параллельным оси y . Исходные данные:

$$1) \vec{B} = (0, 0, B(x)), \quad 2) \vec{A} = (0, A(x), 0), \quad 3) \psi = \psi(x) \leftrightarrow \text{Re}$$

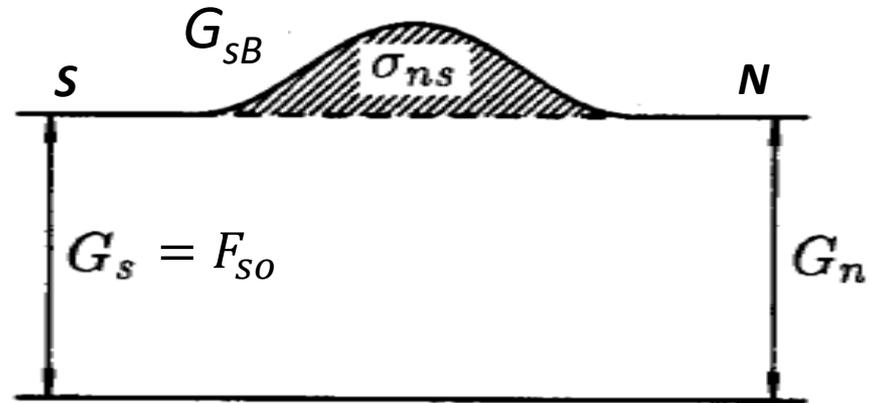
SN граница возникает в промежуточном состоянии сверхпроводника. При этом, в нормальном участке сверхпроводника автоматически устанавливается поле $B_{cm} = \mu_0 H_{cm}$, которое будет внешним полем по отношению к сверхпроводящему участку:

$$G_{sB} = F_{sB} - BH_{cm}$$

Энергия границы раздела:

$$S_{ns} = \int_{-\infty}^{+\infty} (G_{sB} - G_n) dx$$

$$F_{s0} = F_{n0} - \mu_0 H_{cm}^2 / 2$$



$$G_{sB} = F_{n0} + \frac{B^2}{2\mu_0} - \vec{B}\vec{H}_{cm} + \mu_0 H_{cm}^2 \left[-|\psi|^2 + \frac{1}{2}|\psi|^4 + \xi^2 \left| i\nabla\psi + \frac{2\pi}{\Phi_0} \vec{A}\psi \right|^2 \right]$$

Вычисления:

$$\sigma_{ns} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \mu_0 H_{cm}^2 \left[-|\psi|^2 + \frac{1}{2} |\psi|^4 + \xi^2 \left| i\nabla\psi + \frac{2\pi}{\Phi_0} \vec{A}\psi \right|^2 \right] + \frac{B^2}{2\mu_0} - BH_{cm} + \frac{\mu_0 H_{cm}^2}{2} \right\}$$

ψ – вещественная, $A = (0, A(x), 0)$, поэтому:

$$S_{ns} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[m_0 H_{cm}^2 \left(-y^2 + \frac{1}{2} y^4 + x^2 \frac{dy}{dx} \right) + \frac{2\rho x A^2}{F_0} y^2 + \frac{B^2}{2m_0} - BH_{cm} + \frac{m_0 H_{cm}^2}{2} \right]$$

Ур-я ГЛ:

$$-x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2\rho x}{F_0} A^2 y - y + y^3 = 0, \quad \frac{d^2 A}{dx^2} = \frac{y^2}{l^2} A$$

Дают
1-й интеграл:

$$1 - \frac{2\rho x A^2}{F_0} y^2 - \frac{1}{2} y^4 + \frac{2\rho l^2 x}{F_0} \frac{dA}{dx} + x^2 \frac{dy}{dx} = C,$$

$$x \rightarrow -\infty, \quad y \rightarrow 1, \quad dy/dx \rightarrow 0, \quad A \rightarrow 0, \quad C = 1/2 \quad l/x = F_0 / (2\rho\sqrt{2}B_{cm})$$

$$\frac{2\rho x A^2}{F_0} - 1 y^2 + \frac{1}{2} y^4 = x^2 \frac{dy}{dx} + \frac{B^2}{2m_0^2 H_{cm}^2} - \frac{1}{2} = 0,$$

Подставляем в интеграл и получаем:

Плотность энергии границы:

$$l \leftrightarrow X$$

СП1	СП2
$\kappa < 1/\sqrt{2}$	$\kappa > 1/\sqrt{2}$
$\sigma_{ns} > 0$	$\sigma_{ns} < 0$

$$S_{ns} = m_0 H_{cm}^2 \int dx \left[\chi^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{B(B - m_0 H_{cm})}{2m_0^2 H_{cm}^2} \right]$$

$$\chi^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx \sim X$$

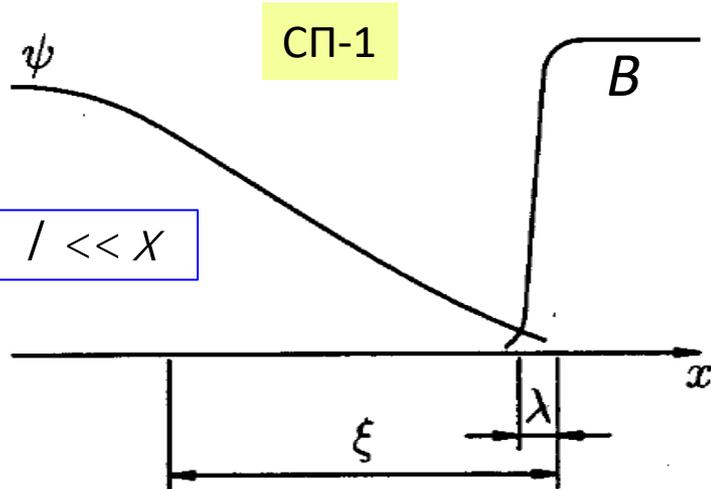
$$S_{ns} \sim -m_0 H_{cm}^2 X < 0$$

$$k \ll 1: S_{ns} \sim m_0 H_{cm}^2 X > 0$$

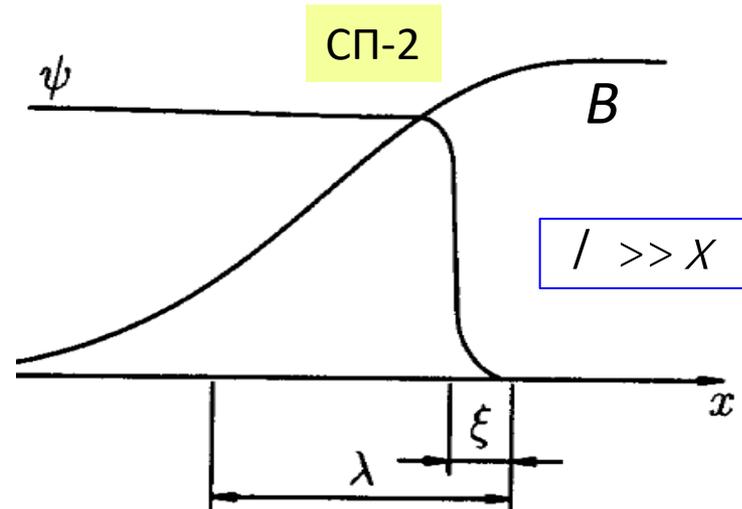
$$S_{ns} = 1.89 \left(m_0 H_{cm}^2 / 2 \right) X \quad \text{- Точный расчет ГЛ}$$

$$k \gg 1: S_{ns} = - \left(m_0 H_{cm}^2 \lambda \right) l$$

$$k \gg 1: \quad \text{- Точный расчет ГЛ}$$



Вложена энергия
(уменьшение концентрации пар)



~ N-область, но энергия
меньше на эн. конденсации пар

Критическое параллельное поле тонкой пленки

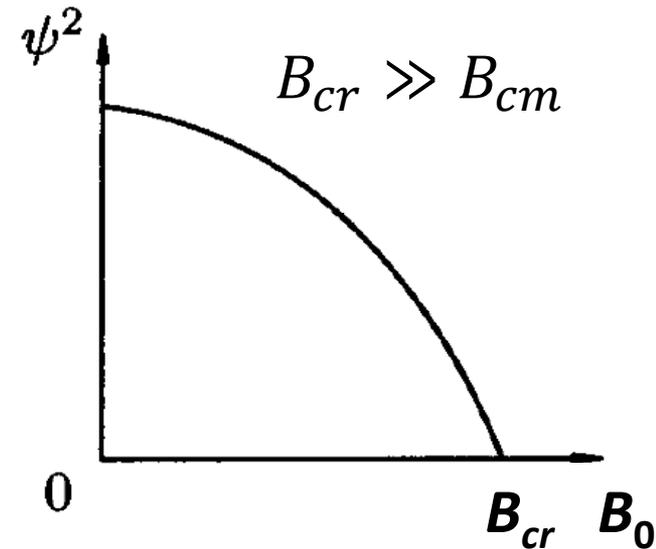
Рассмотрим плоскую токовую пленку толщиной $d \ll \lambda, \xi$, поверхности которой совпадают с плоскостями $x = \pm d/2$, находящуюся в параллельном ей однородном магнитном поле B_0

Экр. ток $j \approx 0$

Используя 1-е уравнение ГЛ, получаем следующий результат:

$$y^2 = 1 - \frac{1}{24} \frac{B_0^2 d^2}{B_{cm}^2 l^2}$$

$$B_{cr} = 2\sqrt{6} B_{cm} \frac{l}{d}$$



Критический ток тонкой пленки

Плотность тока примерно одинаковая по толщине тонкой пленки. Ток, величиной l на единицу ширины пленки, течет вдоль оси y . Имеем те же уравнения, но с другими граничными условиями:

$$y_c^2 = 2/3 \quad \Rightarrow \quad B_{I_c} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} B_{cm} \frac{d}{l}$$

$$B(\pm d/2) = \square B_I$$

– поле, созданное крит. током (малое!!)

$$j_c = \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} H_{cm} / l = \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} B_{cm} / (m_0 l)$$

- Величина, близкая к плотности критического тока сверхпроводника

$$\lambda j_c = H_{cm}$$

Объяснение: теория Дж. Бардина (явление распаривания)

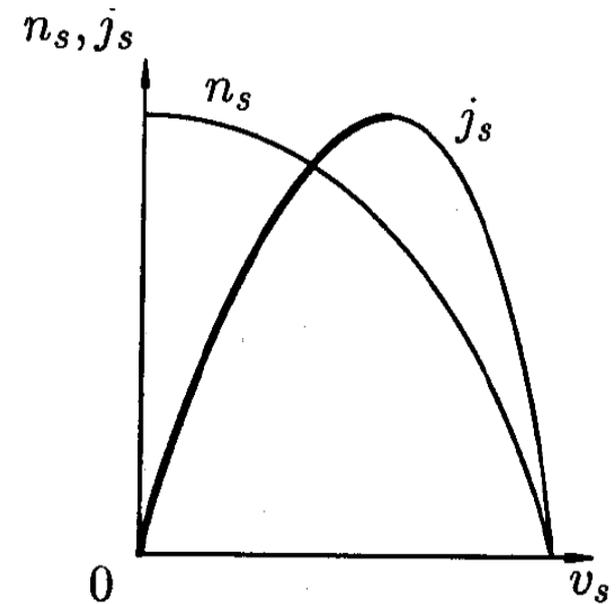
Пренебрегая энергией магнитного поля тонкой пленки, записываем плотность энергии ГЛ: $G_s = F_s$

$$G_s = F_s = F_n - |a|n_s + bn_s^2/2 + n_s m v_s^2/2$$

$$\partial F_s / \partial n_s = -|a| + bn_s + m v_s^2/2 = 0 \quad \square$$

$$n_s = \left(|a| - m v_s^2/2 \right) / b$$

$$j_s = n_s e v_s$$



По мере увеличения плотности тока растет дрейфовая скорость носителей тока, которая, в свою очередь, приводит к уменьшению плотности носителей сверхтока (распаривание куперовских пар). После уменьшения плотности носителей сверхтока до некоторого критического значения, дальнейшее увеличение плотности тока становится невозможным за счет увеличения дрейфовой скорости, то есть достигается критическая плотность сверхпроводящего тока.

Итак:

$$j_c = \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} H_{cm} / l = \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} B_{cm} / (m_0 l)$$

Оценка величины плотности критического тока, близкая к плотности критического тока сверхпроводника

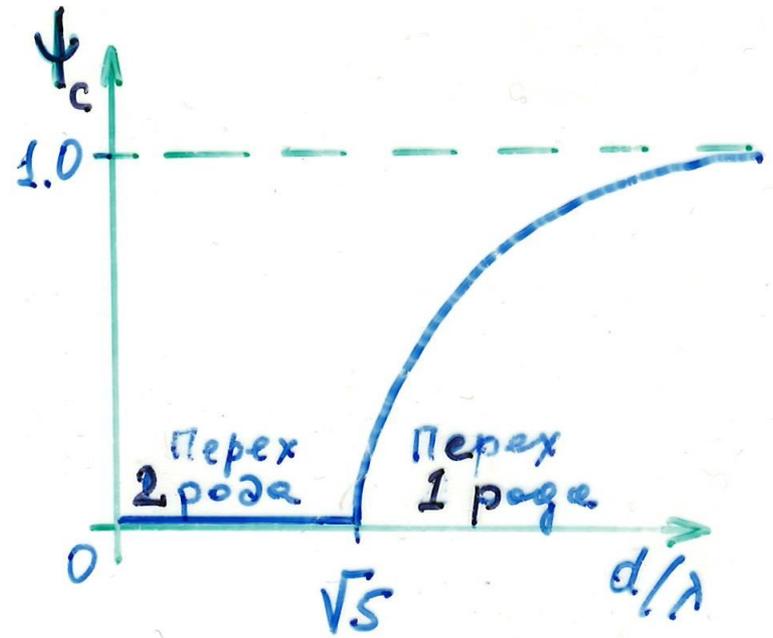
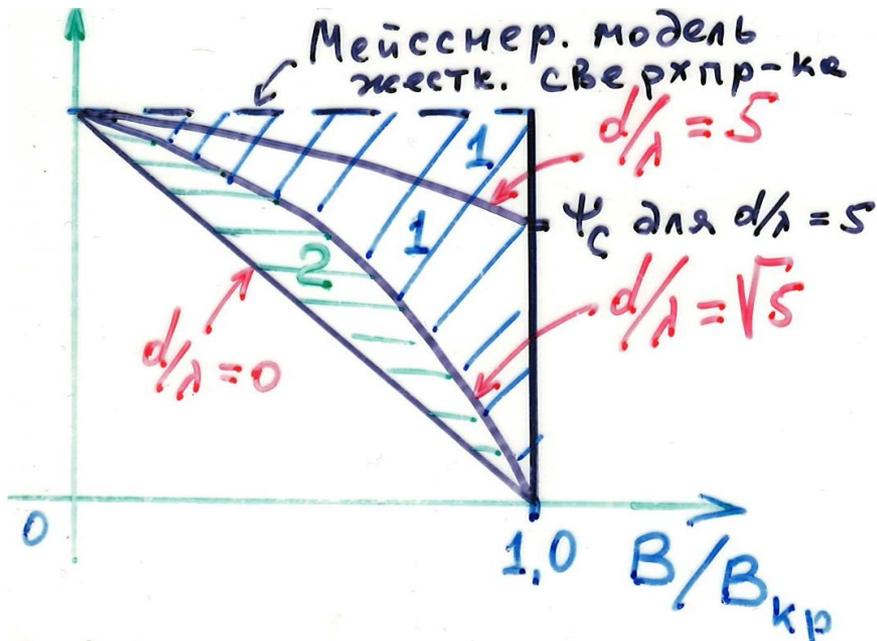
$$\lambda j_c = H_{cm}$$

Резюме для тонких пленок (СП 1 рода):

1) $B_{cm} \neq B_{crit} \neq B_{Ic}$: $B_{Ic} < B_{cm} < B_{crit} \rightarrow$ поле тока мало, не разрушает СП

2) $(j_c)_{\text{т.пленки}} = \text{const} \rightarrow$ хар – ка токонесущей способности пленки

3) Фазовый переход $S - N$: 2 рода \leftrightarrow 1 рода



Сверхпроводники второго рода

Поле одиночного вихря

2-е ур. Гл:

$$\mu_0 \mathbf{j}_s = \text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \frac{|\psi|^2}{\lambda^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \vec{A} \right)$$

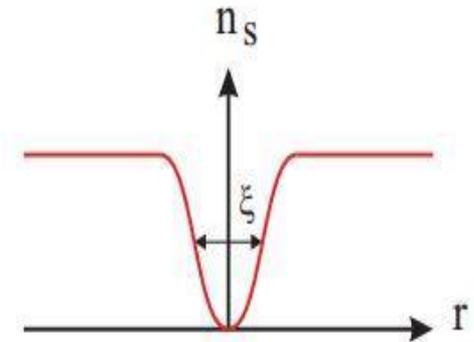
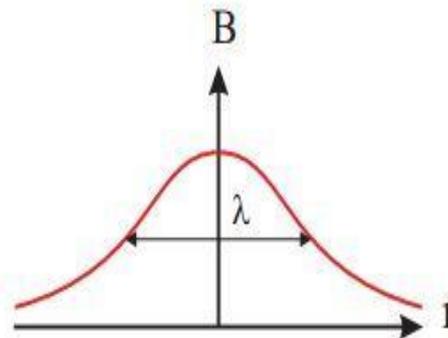
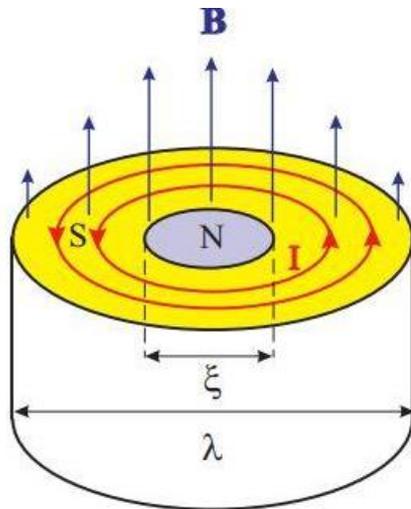
$\kappa \gg 1 \Rightarrow \lambda \gg \xi$ (2-й род СП)

В области $r \gg \lambda$, где $|\psi| = 1$,

→
$$\vec{B} + \lambda^2 \text{rot}(\text{rot} \vec{B}) = \frac{\Phi_0}{2\pi} \text{rot}(\nabla \theta) \rightarrow \Phi_0 \delta(\vec{r}) \vec{e}_v$$

$$B = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0(r/\lambda)$$

функция Макдональда: $K_0(z) \propto \begin{cases} \ln(1/z) & \text{при } z \ll 1, \\ e^{-z}/z^{1/2} & \text{при } z \gg 1. \end{cases}$



Энергия вихря (погонная)

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{z_1}^{z_2} \left\{ B^2 + \lambda^2 (\text{rot}(\vec{B}))^2 \right\} dV \quad \rightarrow \quad W = \frac{\pi}{\mu_0} \left[\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda} \right]^2 \ln(\kappa)$$

Первое критическое поле

Возникающее при появлении вихря внутри сверхпроводника изменение энергии Гиббса в слое единичной толщины перпендикулярном сердцевине вихря:

$$\Delta G = W - \int B H_0 dV = W - \Phi_0 H_0$$

Отсюда следует, что первое критическое поле ($\Delta G = 0$):

$$H_{c1} = W / \Phi_0 = \frac{1}{\mu_0} \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \ln(\kappa)$$

$$B_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \ln(\kappa) \quad \simeq B(0)/2$$

Сила взаимодействия вихрей

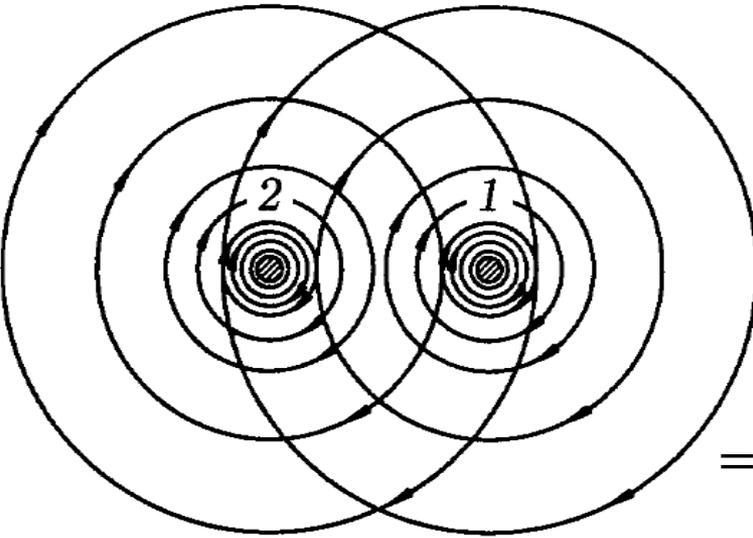
Обобщение уравнения для одиночного вихря в сверхпроводнике на случай двух вихрей:

$$\vec{B} + \lambda^2 \text{rot}(\text{rot} \vec{B}) = \Phi_0 [\delta(\vec{r} - \vec{r}_1) + \delta(\vec{r} - \vec{r}_2)] \vec{e}_v,$$

Погонная энергия системы двух вихрей в сверхпроводнике, отсчитанная от энергии этого же сверхпроводника без вихрей, равна:

$$W_2 = \frac{1}{2\mu_0} \int_{z_1}^{z_2} \left\{ B^2 + \lambda^2 (\text{rot}(\vec{B}))^2 \right\} dV$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \Phi_0 [B(\vec{r}_1) + B(\vec{r}_2)] = 2W + \frac{1}{2\mu_0} \Phi_0 2B_{12}(x)$$



Взаимодействие параллельных одноименных вихрей

Сила, действующая на единицу длины вихря, которая соответствует потенциальной энергии взаимодействия:

$$f = -\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{1}{\mu_0} \Phi_0 \frac{dB_{12}(x)}{dx} = -j_{12} \Phi_0 \Rightarrow \boxed{\vec{f} = [\vec{j} \times \vec{\Phi}_0]} \quad \text{Сила Лоренца}$$

Второе критическое поле

По мере увеличения внешнего магнитного поля увеличивается количество вихрей в сверхпроводнике, расстояние между соседними вихрями в этой треугольной вихревой решетке уменьшается, нормальные сердцевинки вихрей приближаются друг к другу, сверхпроводящая среда между ними принимает вид тонкой пленки, средняя толщина которой становится близкой к длине когерентности ξ , что приводит затем к фазовому переходу из смешанного состояния сверхпроводника в нормальное состояние.

Оценка величины второго критического поля следует может быть получена из выражения критического поля тонкой пленки толщиной $d \sim \xi$:

$$H_{crit} = 2\sqrt{6}H_{cm}\lambda/d,$$

что дает оценку: $H_{c2} = \kappa H_{cm}$. Точный расчет добавляет численный коэффициент:

$$H_{c2} = \sqrt{2}\kappa H_{cm}$$

Третье критическое поле
(поверхностная сверхпроводимость)

$$H_{c3} = 1.69H_{c2} = 1.69\sqrt{2}\kappa H_{cm} .$$

Взаимодействие вихрей с центрами пиннинга

Взаимодействие вихрей с центрами пиннинга в сверхпроводнике обеспечивает высокие значения критического тока

Взаимодействие вихря с поверхностью сверхпроводника (с мейсснеровским током)

Взаимодействие вихря с полостью в сверхпроводнике

Энергия вихря, проходящего через полость, уменьшается (т.е. вихрь притягивается к полости) за счет того, что в проходящей через полость части вихря отсутствует нормальная сердцевина, в которой энергия сверхпроводника в нормальном состоянии выше на энергию конденсации, величина которой для каждой единицы длины вихря составляет :

$$w_p = \pi \xi^2 \cdot \mu_0 H_{cm} / 2.$$

Расчет показывает, что необходимая для этого сила действующая на часть длины вихря, которая взаимодействует с полостью, достигается при плотности критического тока порядка тока распаривания: $j_{crit} \sim H_{cm} / \lambda$

Сверхпроводящие провода: (1) многослойные, (2) объемно-пиннинговые

Высокотемпературные сверхпроводники

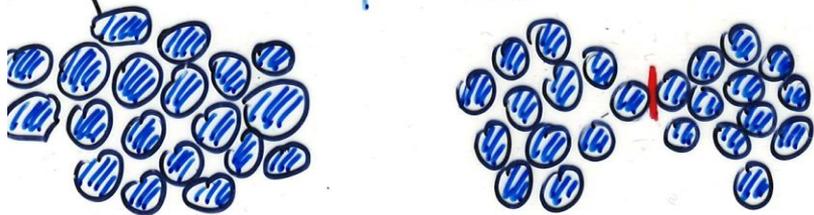
(J.G. Bednorz, K.A. Muller 1986 г.)



Материал и направление	T_c [K]	$\xi(T)$ [nm]	$\lambda(T)$ [nm]	$j_{GL}(T)$ [A/cm ²]
Y-123 ab 77K ⊥ ab	95	7 1.5	50 250	5×10^8 10^8
Bi-2122 ab 77K ⊥ ab	85	8.3 0.4	80 740	1.8×10^8 0.8×10^8
Nb	9.2	40	40	0.5×10^8

Керамика

Керамика : кристаллиты 1...10 мкм



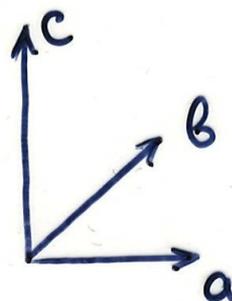
$$\rho \sim 5 \cdot 10^4 \dots 10^2 \text{ Ом} \cdot \text{см}$$

$$j_c \sim 1 \dots 10^2 \text{ А/см}^2$$

Анизотропия:

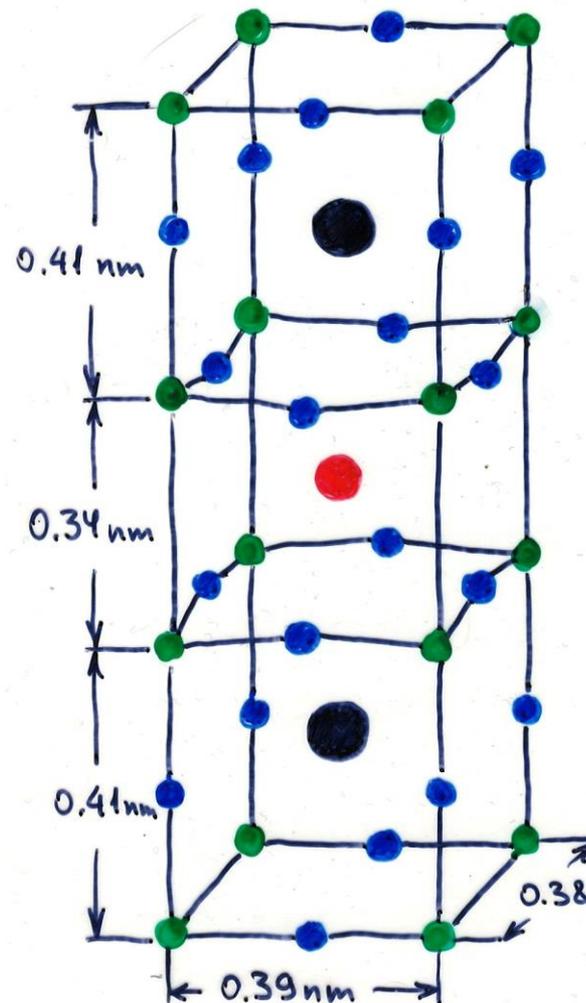
$$\frac{\rho}{\sim 10^2}, \quad \frac{H_{c1,2}}{\sim 10}$$

● - Y
● - Cu

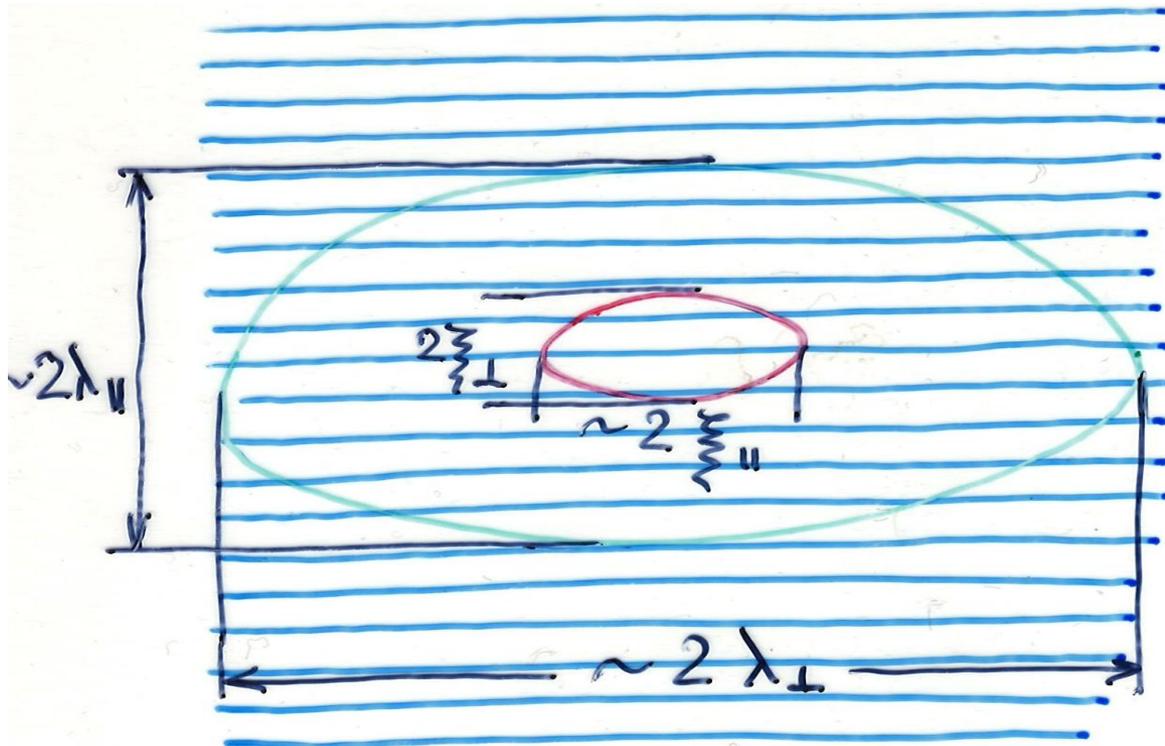


● - Ba
● - O

Монокристалл



Структура вихря в анизотропном сверхпроводнике



(II) Сильно-токовые приложения

- ❖ Электрические линии (кабели)
- ❖ Сверхпроводниковые хранилища энергии (до 100 МВт)
- ❖ **Мощные магниты**

В ускорителях заряженных частиц

Системы очистки воды /высокоградиентный магнитный метод/
(только 2,5% воды на земле пригодны для использования)

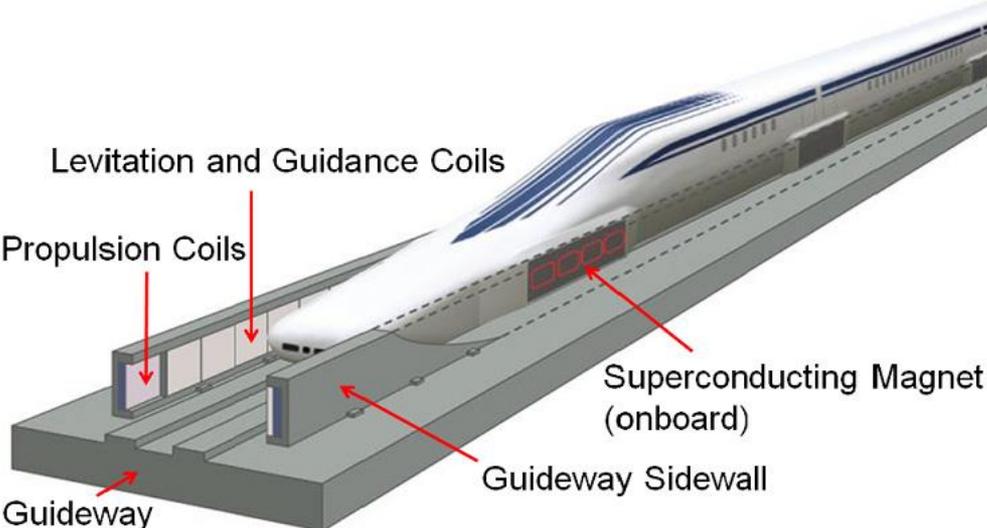
Магниты
в системах МРТ



Мощные электромоторы
для кораблей (до 100 МВт)



Магнитная подвеска транспорта (магнитная левитация, MagLev), $V > 500$ км/час (Япония, Китай)



Representative HTS Maglev vehicles in (a) China, (b) Germany and (c) Brazil.

Литература

1. В. В. Шмидт. Введение в физику сверхпроводников. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: МЦНМО, 2000.
2. Т. Ван Дузер, Ч.У. Тернер. Физические основы сверхпроводниковых устройств и цепей. М.: Радио и связь, 1984.
3. М. Тинкхам. Введение в сверхпроводимость. М.: Атомиздат, 1980.
4. В. Буккель. *Сверхпроводимость*. Мир, Москва, 1975.

Дополнительная литература

1. P. Seidel, ed., “Applied Superconductivity: Handbook on Devices and Applications”, Wiley-VCH, Verlag GmbH & Co. KGaA, 2015.
2. R.N. Bhattacharya, M.P. Paranthaman (eds.), “High Temperature Superconductors”, Wiley - VCH, Verlag, ISBN: 978-3-527-40827-6, GmbH & Co. KGaA, 2010
3. Sh. Nishijima, St. Tckroad at al. “Superconductivity and the environment: a roadmap”, Supercond. Science and Technology, vol. 26, p. 113001, 2013.
4. Э. Линтон. Сверхпроводимость. М.: Мир, 1971.
5. П. Де Жен. Сверхпроводимость металлов и сплавов. М.: Мир, 1968.