Приложение A

A.1 Основные обозначения и определения

Четырехмерные тензорные индексы обозначаются греческими буквами $\alpha, \beta, \ldots \mu, \nu, \ldots$ и принимают значения $0, 1, 2, 3$.

Компоненты 4-вектора перечисляются так:

$$a^{\mu} = \{a^0, \mathbf{a}\}, \qquad a_{\mu} \equiv g_{\mu\nu} a^{\nu} = \{a^0, -\mathbf{a}\}. \tag{A.1.1}$$

Метрический тензор:

$$g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1). \tag{A.1.2}$$

Антисимметричный единичный тензор $e^{\mu\nu\rho\lambda}$ нормирован условием:

$$e^{0123} = 1. \tag{A.1.3}$$

Свертки антисимметричного тензора:

$$\begin{gathered}
e^{\mu\nu\rho\lambda} e_{\mu\nu\rho\lambda} = -24, \\
e^{\mu\nu\rho\lambda} e_{\mu\nu\rho\alpha} = -6\delta^{\lambda}_{\alpha}, \\
e^{\mu\nu\rho\lambda} e_{\mu\nu\alpha\beta} = -2[\delta^{\rho}_{\alpha}\delta^{\lambda}_{\beta} - \delta^{\rho}_{\beta}\delta^{\lambda}_{\alpha}], \\
e^{\mu\nu\rho\lambda} e_{\mu\alpha\beta\gamma} = -\delta^{\nu}_{\alpha}[\delta^{\rho}_{\beta}\delta^{\lambda}_{\gamma} - \delta^{\rho}_{\gamma}\delta^{\lambda}_{\beta}] + \\
+\delta^{\nu}_{\beta}[\delta^{\rho}_{\alpha}\delta^{\lambda}_{\gamma} - \delta^{\rho}_{\gamma}\delta^{\lambda}_{\alpha}] - \delta^{\nu}_{\gamma}[\delta^{\rho}_{\alpha}\delta^{\lambda}_{\beta} - \delta^{\rho}_{\beta}\delta^{\lambda}_{\alpha}].
\end{gathered} \tag{A.1.4}$$

Двумерный антисимметричный тензор ε_{ij} нормирован условием

$$\varepsilon_{12} = 1. \tag{A.1.5}$$

A.2 Базисы в пространстве Минковского

Стандартный базис e_i^μ :

$$e_0^\mu = \{1,\, \mathbf{0}\} \quad e_i^\mu = \{0,\, \mathbf{e}_i\}. \tag{A.2.1}$$

Канонический базис L_i^μ :

$$L_0^\mu = u^\mu, \quad L_i^\mu = \left\{ (\mathbf{ue}_i)\,,\ \mathbf{e}_i + \frac{(\mathbf{ue}_i)\mathbf{u}}{1+u^0} \right\} \tag{A.2.2}$$

— преобразованный без поворота осей в лабораторную систему базис e_i^μ.

Матрица этого преобразования:

$$L = \begin{Vmatrix} u^0 & u^1 & u^2 & u^3 \\ u^1 & 1 + \dfrac{u^1u^1}{1+u^0} & \dfrac{u^1u^2}{1+u^0} & \dfrac{u^1u^3}{1+u^0} \\ u^2 & \dfrac{u^2u^1}{1+u^0} & 1 + \dfrac{u^2u^2}{1+u^0} & \dfrac{u^2u^3}{1+u^0} \\ u^3 & \dfrac{u^3u^1}{1+u^0} & \dfrac{u^3u^2}{1+u^0} & 1 + \dfrac{u^3u^3}{1+u^0} \end{Vmatrix} \tag{A.2.3}$$

Обратное преобразование L^{-1} получается заменой $\mathbf{u} \to -\mathbf{u}$.

Базис плосковолнового поля Λ_i^μ :

$$\Lambda_0^\mu = u^\mu, \quad \Lambda_{1,2}^\mu = a_{1,2}^\mu - n^\mu \frac{(a_{1,2}u)}{(nu)}, \quad \Lambda_3^\mu = \frac{n^\mu}{(nu)} - u^\mu \tag{A.2.4}$$

— преобразованный с поворотом осей в лабораторную систему базис e_i^μ.

Матрица этого преобразования:

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} u^0 & \dfrac{u^1}{u_-} & \dfrac{u^2}{u_-} & \dfrac{1}{u_-} - u^0 \\ u^1 & 1 & 0 & -u^1 \\ u^2 & 0 & 1 & -u^2 \\ u^3 & \dfrac{u^1}{u_-} & \dfrac{u^2}{u_-} & \dfrac{1}{u_-} - u^3 \end{Vmatrix} \tag{A.2.5}$$

Базис однородного поля N_i^μ :

$$
\begin{aligned}
&N_0^\mu = u^\mu, \quad N_1^\mu = \left[a_2^\mu(a_1 u) - a_1^\mu(a_2 u)\right] u_\perp^{-1},\\
&N_2^\mu = \left[u^\mu u_\perp - a_1^\mu \frac{(a_1 u)}{u_\perp} - a_2^\mu \frac{(a_2 u)}{u_\perp}\right](1+u_\perp^2)^{-1/2},\\
&N_3^\mu = \left[n^\mu(n_+ u) - n_+^\mu(nu)\right](1+u_\perp^2)^{-1/2}
\end{aligned}
\tag{A.2.6}
$$

— преобразованный с поворотом осей в лабораторную систему базис e_i^μ.

Матрица этого преобразования:

$$
N = \left\| \begin{matrix}
u^0 & 0 & \dfrac{u^0 u_\perp}{\sqrt{1+u_\perp^2}} & \dfrac{u^3}{\sqrt{1+u_\perp^2}} \\
u^1 & \dfrac{u^2}{u_\perp} & \dfrac{u^1}{u_\perp}\sqrt{1+u_\perp^2} & 0 \\
u^2 & -\dfrac{u^1}{u_\perp} & \dfrac{u^2}{u_\perp}\sqrt{1+u_\perp^2} & 0 \\
u^3 & 0 & \dfrac{u^3 u_\perp}{\sqrt{1+u_\perp^2}} & \dfrac{u^0}{\sqrt{1+u_\perp^2}}
\end{matrix} \right\|
\tag{A.2.7}
$$

Для любого ортогонального базиса, полученного из стандартного преобразованием Лоренца, справедливы следующие соотношения:

$$
\begin{gathered}
n_i^\mu n_{j\mu} = g_{ij}, \qquad g^{ij} n_i^\mu n_j^\nu = g^{\mu\nu},\\
e^{\mu\nu\rho\lambda} n_{i\mu} n_{j\nu} n_{k\rho} n_{l\lambda} = \Delta e_{ijkl}, \qquad e^{ijkl} n_{i\mu} n_{j\nu} n_{k\rho} n_{l\lambda} = \Delta e_{\mu\nu\rho\lambda},\\
\Delta = \mathrm{Det}\left| n_0^\mu n_1^\nu n_2^\rho n_3^\lambda \right| = -\frac{1}{4!} e_{\mu\nu\rho\lambda} e^{ijkl} n_i^\mu n_j^\nu n_k^\rho n_l^\lambda.
\end{gathered}
\tag{A.2.8}
$$

$$
\begin{aligned}
&e^{\mu\nu\rho\lambda} n_{j\nu} n_{k\rho} n_{l\lambda} = \Delta e_{ijkl} g^{im} n_m^\mu,\\
&e^{ijkl} n_{j\nu} n_{k\rho} n_{l\lambda} = \Delta e_{\mu\nu\rho\lambda} g^{im} n_m^\mu,\\
&e^{\mu\nu\rho\lambda} n_{k\rho} n_{l\lambda} = \Delta e_{ijkl} g^{im} g^{jn} n_m^\mu n_n^\nu,\\
&e^{ijkl} n_{k\rho} n_{l\lambda} = \Delta e_{\mu\nu\rho\lambda} g^{im} g^{jn} n_m^\mu n_n^\nu,\\
&e^{\mu\nu\rho\lambda} n_{l\lambda} = \Delta e_{ijkl} g^{im} g^{jn} g^{kp} n_m^\mu n_n^\nu n_p^\rho,\\
&e^{ijkl} n_{l\lambda} = \Delta e_{\mu\nu\rho\lambda} g^{im} g^{jn} g^{kp} n_m^\mu n_n^\nu n_p^\rho.
\end{aligned}
\tag{A.2.9}
$$

Базис нулевой плоскости:

$$n^\mu = (1,\ \mathbf{n})\,, \qquad n_+^\mu = \frac{1}{2}\,(1, -\,\mathbf{n})\,,$$
$$a_1^\mu = (0,\ \mathbf{a}_1)\,, \qquad a_2^\mu = (0,\ \mathbf{a}_2)\,. \tag{A.2.10}$$

$$n^2 = n_+^2 = (na_i) = (n_+a_i) = 0, \quad (nn_+) = 1, \quad (a_ia_j) = -\delta_{ij},$$
$$n^\mu n_+^\nu + n_+^\mu n^\nu - a_1^\mu a_1^\nu - a_2^\mu a_2^\nu = g^{\mu\nu}. \tag{A.2.11}$$

В базисе (A.2.10) произвольный вектор p^μ имеет вид

$$p^\mu = n^\mu p_+ + n_+^\mu p_- - a_i^\mu p_i, \tag{A.2.12}$$

где

$$p_- = (np), \quad p_+ = (n_+p), \quad p_i = (a_ip). \tag{A.2.13}$$

Если

$$\Delta_0 = \mathrm{Det}\left|n_+^\mu n^\nu a_1^\rho a_2^\lambda\right| = -e_{\mu\nu\rho\lambda} n_+^\mu n^\nu a_1^\rho a_2^\lambda, \tag{A.2.14}$$

то

$$\begin{aligned}
&\Delta_0 e^{\mu\nu\rho\lambda} = \\
&= \left[n^\mu n_+^\nu - n_+^\mu n^\nu\right]\left[a_2^\rho a_1^\lambda - a_1^\rho a_2^\lambda\right] + \left[n^\rho n_+^\mu - n_+^\rho n^\mu\right]\left[a_2^\nu a_1^\lambda - a_1^\nu a_2^\lambda\right] + \\
&+ \left[n^\mu n_+^\lambda - n_+^\mu n^\lambda\right]\left[a_2^\nu a_1^\rho - a_1^\nu a_2^\rho\right] + \left[n^\rho n_+^\lambda - n_+^\rho n^\lambda\right]\left[a_2^\mu a_1^\nu - a_1^\mu a_2^\nu\right] + \\
&+ \left[n^\lambda n_+^\nu - n_+^\lambda n^\nu\right]\left[a_2^\mu a_1^\rho - a_1^\mu a_2^\rho\right] + \left[n^\nu n_+^\rho - n_+^\nu n^\rho\right]\left[a_2^\mu a_1^\lambda - a_1^\mu a_2^\lambda\right].
\end{aligned} \tag{A.2.15}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\Delta_0 e_{\mu\nu\rho\lambda}\left[n^\rho a_1^\lambda - a_1^\rho n^\lambda\right] &= -\left[n_\mu a_{2\nu} - a_{2\mu} n_\nu\right], \\
-\frac{1}{2}\Delta_0 e_{\mu\nu\rho\lambda}\left[n^\rho a_2^\lambda - a_2^\rho n^\lambda\right] &= \left[n_\mu a_{1\nu} - a_{1\mu} n_\nu\right], \\
-\frac{1}{2}\Delta_0 e_{\mu\nu\rho\lambda}\left[n^\rho n_+^\lambda - n_+^\rho n^\lambda\right] &= \left[a_{2\mu} a_{1\nu} - a_{1\mu} a_{2\nu}\right], \\
-\frac{1}{2}\Delta_0 e_{\mu\nu\rho\lambda}\left[a_2^\rho a_1^\lambda - a_1^\rho a_2^\lambda\right] &= -\left[n_\mu n_{+\nu} - n_{+\mu} n_\nu\right].
\end{aligned} \tag{A.2.16}$$

A.3 Свойства антисимметричных тензоров

Перечисление компонент антисимметричного тензора:

$$A^{\mu\nu} = (\mathbf{p}, \mathbf{a}) = \begin{Vmatrix} 0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ -p_1 & 0 & -a_3 & a_2 \\ -p_2 & a_3 & 0 & -a_1 \\ -p_3 & -a_2 & a_1 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$A_{\mu\nu} = (-\mathbf{p}, \mathbf{a}) = \begin{Vmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & 0 & -a_3 & a_2 \\ p_2 & a_3 & 0 & -a_1 \\ p_3 & -a_2 & a_1 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$A_{\mu}{}^{\nu} = \begin{Vmatrix} 0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & 0 & a_3 & -a_2 \\ p_2 & -a_3 & 0 & a_1 \\ p_3 & a_2 & -a_1 & 0 \end{Vmatrix} \qquad \text{(A.3.1)}$$

$$A^{\mu}{}_{\nu} = \begin{Vmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ -p_1 & 0 & a_3 & -a_2 \\ -p_2 & -a_3 & 0 & a_1 \\ -p_3 & a_2 & -a_1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Дуальный антисимметричный тензор:

$$^{\star}A^{\mu\nu} \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{2}\, e^{\mu\nu\rho\lambda} A_{\rho\lambda}, \qquad ^{\star\star}A^{\mu\nu} = -A^{\mu\nu}. \qquad \text{(A.3.2)}$$

Тензор электромагнитного поля:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = (\mathbf{E}, \mathbf{H}). \qquad \text{(A.3.3)}$$

Перечисление компонент дуального антисимметричного тензора:

$$
\begin{aligned}
{}^\star\! A^{\mu\nu} &= (\mathbf{a}, -\mathbf{p}) = \begin{Vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & 0 & p_3 & -p_2 \\ -a_2 & -p_3 & 0 & p_1 \\ -a_3 & p_2 & -p_1 & 0 \end{Vmatrix} \\
{}^\star\! A_{\mu\nu} &= (-\mathbf{a}, -\mathbf{p}) = \begin{Vmatrix} 0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & 0 & p_3 & -p_2 \\ a_2 & -p_3 & 0 & p_1 \\ a_3 & p_2 & -p_1 & 0 \end{Vmatrix} \\
{}^\star\! A_\mu{}^\nu &= \begin{Vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 0 & -p_3 & p_2 \\ a_2 & p_3 & 0 & -p_1 \\ a_3 & -p_2 & p_1 & 0 \end{Vmatrix} \\
{}^\star\! A^\mu{}_\nu &= \begin{Vmatrix} 0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ -a_1 & 0 & -p_3 & p_2 \\ -a_2 & p_3 & 0 & -p_1 \\ -a_3 & -p_2 & p_1 & 0 \end{Vmatrix}
\end{aligned}
\tag{A.3.4}
$$

Инварианты антисимметричного тензора:

$$
\begin{gathered}
I_1 = \frac{1}{4} A^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} {}^\star\! A^{\mu\nu} {}^\star\! A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}^2 - \mathbf{p}^2), \\
I_2 = \frac{1}{4} {}^\star\! A^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = -\mathbf{p}\mathbf{a}.
\end{gathered}
\tag{A.3.5}
$$

Произведения антисимметричных тензоров:

$$
A^{\mu\rho} A_\rho{}^\nu = \begin{Vmatrix} \mathbf{p}^2 & -[\mathbf{p} \times \mathbf{a}]_k \\ -[\mathbf{p} \times \mathbf{a}]_i & \delta_{ik} \mathbf{a}^2 - (p_i p_k + a_i a_k) \end{Vmatrix}
\tag{A.3.6}
$$

$$
{}^{\star}A^{\mu\rho}\,{}^{\star}A_{\rho}{}^{\nu} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{a}^2 & -[\mathbf{p}\times\mathbf{a}]_k \\ -[\mathbf{p}\times\mathbf{a}]_i & \delta_{ik}\mathbf{p}^2 - (p_i p_k + a_i a_k) \end{matrix} \right\| \tag{A.3.7}
$$

$$
{}^{\star}A^{\mu\lambda}A_{\lambda\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}\,(\mathbf{pa}), \qquad {}^{\star}A^{\mu\lambda}\,{}^{\star}A_{\lambda\nu} - A^{\mu\lambda}A_{\lambda\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}\,(\mathbf{a}^2 - \mathbf{p}^2). \tag{A.3.8}
$$

$$
A^{\mu}{}_{\rho}A^{\rho}{}_{\sigma}A^{\sigma\nu} = -A^{\mu\nu}(\mathbf{a}^2 - \mathbf{p}^2) + {}^{\star}A^{\mu\nu}(\mathbf{pa}). \tag{A.3.9}
$$

$$
{}^{\star}A^{\mu}{}_{\rho}\,{}^{\star}A^{\rho}{}_{\sigma}\,{}^{\star}A^{\sigma\nu} = {}^{\star}A^{\mu\nu}(\mathbf{a}^2 - \mathbf{p}^2) + A^{\mu\nu}(\mathbf{pa}). \tag{A.3.10}
$$

$$
A^{\mu\nu}A'_{\mu\nu} = 2(\mathbf{aa}' - \mathbf{pp}'). \tag{A.3.11}
$$

Любой антисимметричный тензор можно представить в виде

$$
A^{\mu\nu} = (a^{\mu}b^{\nu} - b^{\mu}a^{\nu}) + (c^{\mu}d^{\nu} - d^{\mu}c^{\nu}). \tag{A.3.12}
$$

Для любых 4-векторов $b^{\mu}, d^{\mu},\ (bd) \neq 0$:

$$
A^{\mu\nu}(bd) = -\left[b^{\mu}A^{\nu\rho}d_{\rho} - A^{\mu\rho}d_{\rho}b^{\nu}\right] + {}^{\star}\left[d^{\mu}\,{}^{\star}A^{\nu\rho}b_{\rho} - {}^{\star}A^{\mu\rho}b_{\rho}d^{\nu}\right]. \tag{A.3.13}
$$

Отсюда следует, что

$$
\begin{aligned}
b_{\mu}{}^{\star}A^{\mu}_{\rho}{}^{\star}A^{\rho}_{\nu}b^{\nu}d^{2} + \left(b_{\mu}{}^{\star}A^{\mu}_{\nu}d^{\nu}\right)^{2} - d_{\mu}A^{\mu}_{\rho}A^{\rho}_{\nu}d^{\nu}b^{2} - \left(b_{\mu}A^{\mu}_{\nu}d^{\nu}\right)^{2} &= \\
= b_{\mu}{}^{\star}A^{\mu}_{\rho}{}^{\star}A^{\rho}_{\nu}d^{\nu}(bd) - b_{\mu}A^{\mu}_{\rho}A^{\rho}_{\nu}d^{\nu}(bd) = 2(bd)^{2}I_{1}.&
\end{aligned} \tag{A.3.14}
$$

Если

$$
A^{\mu\nu} = a^{\mu}b^{\nu} - b^{\mu}a^{\nu}, \tag{A.3.15}
$$

то тензор называется плоским.

Чтобы тензор был плоским, необходимо и достаточно выполнения условия

$$
I_2 = 0. \tag{A.3.16}
$$

Характеристическое уравнение для определения собственных значений антисимметричного тензора:

$$
\lambda^4 + 2I_1\lambda^2 - I_2^2 = 0. \tag{A.3.17}
$$

Собственные значения:

$$\lambda_{1,2} = \pm p, \quad \lambda_{3,4} = \pm ia, \tag{A.3.18}$$

где

$$p = \left[(I_1^2 + I_2^2)^{1/2} - I_1\right]^{1/2}, \qquad a = \left[(I_1^2 + I_2^2)^{1/2} + I_1\right]^{1/2}. \tag{A.3.19}$$

При этом

$$pa = |\mathbf{pa}|, \qquad a^2 - p^2 = \mathbf{a}^2 - \mathbf{p}^2. \tag{A.3.20}$$

Следовательно, плоский тензор имеет, как минимум, два нулевых собственных значения. И обратно: если антисимметричный тензор имеет нулевые собственные значения, то он плоский.

Уравнения для собственных векторов $X_i^\mu = \{X_i^0, \mathbf{X}_i\}$:

$$\mathbf{p}\mathbf{X}_i = -\lambda_i X_i^0, \qquad \mathbf{p}X_i^0 + [\mathbf{a}\times\mathbf{X}_i] = -\lambda_i \mathbf{X}_i. \tag{A.3.21}$$

Собственные векторы:

$$\mathbf{X}_i = -\frac{X_i^0}{\lambda_i^2 + \mathbf{a}^2}\left[\lambda_i\mathbf{p} + \frac{(\mathbf{pa})\mathbf{a}}{\lambda_i} + [\mathbf{p}\times\mathbf{a}]\right]. \tag{A.3.22}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_{1,2} &= -X_+^{-1}\left\{[\mathbf{p}\times\mathbf{a}] \pm (p\,\mathbf{p} - a\,\mathbf{a}\,\mathrm{sign}I_2)\right\} X_{1,2}^0, \\
\mathbf{X}_{3,4} &= -X_-^{-1}\left\{[\mathbf{p}\times\mathbf{a}] \pm i(a\,\mathbf{p} + p\,\mathbf{a}\,\mathrm{sign}I_2)\right\} X_{3,4}^0, \\
X_\pm &= \frac{1}{2}[\mathbf{p}^2 + \mathbf{a}^2 \pm (p^2 + a^2)].
\end{aligned} \tag{A.3.23}$$

$$(X_i X_i) = 0, \quad (X_{1,2}X_{3,4}) = 0, \quad (X_1 X_2) = 1, \quad (X_3 X_4) = -1. \tag{A.3.24}$$

A.4 Алгебра матриц Дирака

Определяющее соотношение:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \tag{A.4.1}$$

Выбираем: γ^0 — эрмитова, $\boldsymbol{\gamma}$ — антиэрмитовы.

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma_\mu, \quad \gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu, \quad \gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad \gamma^{5\dagger} = \gamma^5. \tag{A.4.2}$$

Для любого вектора a^μ :

$$\hat{a} = \gamma^\mu a_\mu. \tag{A.4.3}$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) = (\boldsymbol{\alpha}, i\boldsymbol{\Sigma}). \tag{A.4.4}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}, \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \gamma^5\boldsymbol{\gamma}\gamma^0, \qquad \boldsymbol{\alpha} = -\gamma^5\boldsymbol{\Sigma}. \tag{A.4.5}$$

Базисные элементы алгебры матриц Дирака:

$$\begin{array}{lll}
\Gamma_{(1)} = E & \Gamma^\dagger_{(1)} = E & \gamma^\alpha\Gamma_{(1)}\gamma_\alpha = 4\Gamma_{(1)} \\
\Gamma^{\mu\nu}_{(2)} = \sigma^{\mu\nu} & \Gamma^{\mu\nu\dagger}_{(2)} = -\sigma_{\mu\nu} & \gamma^\alpha\Gamma^{\mu\nu}_{(2)}\gamma_\alpha = 0 \\
\Gamma^\mu_{(3)} = \gamma^\mu & \Gamma^{\mu\dagger}_{(3)} = \gamma_\mu & \gamma^\alpha\Gamma^\mu_{(3)}\gamma_\alpha = -2\Gamma^\mu_{(3)} \\
\Gamma^\mu_{(4)} = \gamma^5\gamma^\mu & \Gamma^{\mu\dagger}_{(4)} = -\gamma^5\gamma_\mu & \gamma^\alpha\Gamma^\mu_{(4)}\gamma_\alpha = 2\Gamma^\mu_{(4)} \\
\Gamma_{(5)} = \gamma^5 & \Gamma^\dagger_{(5)} = \gamma^5 & \gamma^\alpha\Gamma_{(5)}\gamma_\alpha = -4\Gamma_{(5)}
\end{array} \tag{A.4.6}$$

$$\mathrm{Sp}\Gamma_{(1)} = 4; \quad \mathrm{Sp}\Gamma^a_{(i)} = 0, \quad i \neq 1; \quad \Gamma^a_{(i)}\Gamma^{a\dagger}_{(i)} = E. \tag{A.4.7}$$

Разложение по базисным элементам:

$$A = \sum_{i,a} A_{(i)a}\Gamma^a_{(i)}, \quad \text{где } A_{(i)a} = \frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left\{A\Gamma^{a\dagger}_{(i)}\right\}. \tag{A.4.8}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_\alpha\gamma^\mu\gamma^\alpha &= -2\gamma^\mu, \\
\gamma_\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha &= 4g^{\mu\nu}, \\
\gamma_\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\alpha &= -2\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu, \\
\gamma_\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda\gamma^\alpha &= 2\left(\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho + \gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\lambda\right).
\end{aligned} \tag{A.4.9}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\gamma^\mu\gamma^\nu &= g^{\mu\nu}, \\
\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda &= ie^{\mu\nu\rho\lambda}, \\
\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda &= g^{\mu\nu}g^{\rho\lambda} + g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda}.
\end{aligned} \tag{A.4.10}$$

$$\begin{aligned}
e^{\mu\nu\rho\lambda}\gamma_\lambda &= -\frac{i}{2}\gamma^5[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - \gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu], \\
e^{\mu\nu\rho\lambda}\sigma_{\rho\lambda} &= 2i\gamma^5\sigma^{\mu\nu}, \\
e^{\mu\nu\rho\lambda}\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda &= 6i\gamma^5\gamma^\mu, \\
e^{\mu\nu\rho\lambda}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda &= -24i\gamma^5.
\end{aligned} \tag{A.4.11}$$

$$
\begin{aligned}
\gamma^\mu\gamma^\nu &= g^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu},\\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha &= g^{\mu\nu}\gamma^\alpha + g^{\nu\alpha}\gamma^\mu - g^{\mu\alpha}\gamma^\nu + i\gamma^5 e^{\mu\nu\alpha\beta}\gamma_\beta,\\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta &= g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + g^{\mu\nu}\sigma^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}\sigma^{\mu\nu}+\\
&+g^{\nu\alpha}\sigma^{\mu\beta} - g^{\mu\alpha}\sigma^{\nu\beta} + g^{\mu\beta}\sigma^{\nu\alpha} - g^{\nu\beta}\sigma^{\mu\alpha} + i\gamma^5 e^{\mu\nu\alpha\beta}.
\end{aligned}
\tag{A.4.12}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\alpha\beta} &= g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}+\\
&+g^{\nu\alpha}\sigma^{\mu\beta} - g^{\mu\alpha}\sigma^{\nu\beta} + g^{\mu\beta}\sigma^{\nu\alpha} - g^{\nu\beta}\sigma^{\mu\alpha} + i\gamma^5 e^{\mu\nu\alpha\beta}.
\end{aligned}
\tag{A.4.13}
$$

$$
[\sigma^{\mu\nu}, \sigma^{\alpha\beta}] = 2\{g^{\nu\alpha}\sigma^{\mu\beta} - g^{\mu\alpha}\sigma^{\nu\beta} + g^{\mu\beta}\sigma^{\nu\alpha} - g^{\nu\beta}\sigma^{\mu\alpha}\}. \tag{A.4.14}
$$

$$
[\sigma^{\mu\nu}, \sigma^{\alpha\beta}]_+ = 2\{g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + i\gamma^5 e^{\mu\nu\alpha\beta}\}. \tag{A.4.15}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^{\mu\nu}\gamma^\alpha &= g^{\nu\alpha}\gamma^\mu - g^{\mu\alpha}\gamma^\nu + i\gamma^5 e^{\mu\nu\alpha\beta}\gamma_\beta,\\
\gamma^\alpha\sigma^{\mu\nu} &= -g^{\nu\alpha}\gamma^\mu + g^{\mu\alpha}\gamma^\nu + i\gamma^5 e^{\mu\nu\alpha\beta}\gamma_\beta.
\end{aligned}
\tag{A.4.16}
$$

$$
\begin{aligned}
[\sigma^{\mu\nu}, \gamma^\alpha] &= 2\{g^{\nu\alpha}\gamma^\mu - g^{\mu\alpha}\gamma^\nu\},\\
[\sigma^{\mu\nu}, \gamma^\alpha]_+ &= 2i\gamma^5 e^{\mu\nu\alpha\beta}\gamma_\beta.
\end{aligned}
\tag{A.4.17}
$$

Пусть $A^{\mu\nu}, B^{\mu\nu}$ — антисимметричные тензоры. Тогда

$$
\begin{aligned}
A_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} &= i\gamma^5 {}^\star\!A_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu},\\
A_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}B_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} &= -2A_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - 4A_{\mu\nu}B^{\mu}{}_{\beta}\sigma^{\nu\beta} + i\gamma^5 e^{\mu\nu\alpha\beta}A_{\mu\nu}B_{\alpha\beta} \equiv\\
&\equiv -2A_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - 4A_{\mu\nu}B^{\mu}{}_{\beta}\sigma^{\nu\beta} - 2i\gamma^5 {}^\star\!A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}.
\end{aligned}
\tag{A.4.18}
$$

В частности,

$$
\begin{aligned}
A_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}A_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} &= -2A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} - 2i\gamma^5 {}^\star\!A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} \equiv -8\left(I_1 + i\gamma^5 I_2\right),\\
{}^\star\!A_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}A_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} &= -2\,{}^\star\!A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} + 2i\gamma^5 A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} \equiv -8\left(I_2 - i\gamma^5 I_1\right).
\end{aligned}
\tag{A.4.19}
$$

Из (A.3.13) следует, что

$$
\begin{aligned}
A^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}(bd) &= \left[A^{\nu\rho}\gamma_\nu d_\rho \hat{b} - \hat{b}A^{\nu\rho}\gamma_\nu d_\rho\right]+\\
&+i\gamma^5\left[{}^\star\!A^{\nu\rho}\gamma_\nu b_\rho \hat{d} - \hat{d}\,{}^\star\!A^{\nu\rho}\gamma_\nu b_\rho\right].
\end{aligned}
\tag{A.4.20}
$$

Если через X, Y обозначены выражения, содержащие произведения матриц Дирака, а через $\overline{X}, \overline{Y}$ те же выражения, в которых порядок записи

γ-матриц изменен на обратный, то

$$\begin{gathered}\mathrm{Sp}\{\gamma^{\alpha}X\}\mathrm{Sp}\{\gamma_{\alpha}Y\} = \mathrm{Sp}\{(X+\overline{X})(Y+\overline{Y})\}- \\ -\mathrm{Sp}\{X\}\mathrm{Sp}\{Y\} - \mathrm{Sp}\{\gamma^5 X\}\mathrm{Sp}\{\gamma^5 Y\}.\end{gathered} \tag{A.4.21}$$

A.5 Инвариантное интегрирование по углам

Рассмотрим интеграл

$$J_0 = \int dO \frac{1}{(lu)^2} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta d\vartheta}{(u^0 - |\mathbf{u}|\cos\vartheta)^2} = \frac{4\pi}{u^{\mu}u_{\mu}}. \tag{A.5.1}$$

Таким образом, J_0 – инвариант, и на массовой поверхности $u^{\mu}u_{\mu} = 1$

$$J_0 = 4\pi. \tag{A.5.2}$$

Дифференцируя выражение (A.5.1) по компонентам 4-скорости, имеем

$$\begin{gathered}\int dO \frac{l^{\sigma}}{(lu)^3} = 4\pi u^{\mu}, \\ \int dO \frac{l^{\sigma}l^{\mu}}{(lu)^4} = 4\pi\left\{\frac{4}{3}u^{\sigma}u^{\mu} - \frac{1}{3}g^{\sigma\mu}\right\}, \\ \int dO \frac{l^{\sigma}l^{\mu}l^{\nu}}{(lu)^5} = 4\pi\left\{2u^{\sigma}u^{\mu}u^{\nu} - \frac{1}{3}\left[g^{\sigma\mu}u^{\nu} + g^{\sigma\nu}u^{\mu} + g^{\mu\nu}u^{\sigma}\right]\right\}\end{gathered} \tag{A.5.3}$$

и т. д.

Так как $l^0 = 1$, то, полагая $\sigma = 0$, имеем

$$\begin{gathered}J_1 = \int dO \frac{1}{(lu)^3} = 4\pi u^0, \\ J_2 = \int dO \frac{l^{\mu}}{(lu)^4} = 4\pi\left\{\frac{4}{3}u^0 u^{\mu} - \frac{1}{3}g^{0\mu}\right\}, \\ J_3 = \int dO \frac{l^{\mu}l^{\nu}}{(lu)^5} = 4\pi\left\{2u^0 u^{\mu}u^{\nu} - \frac{1}{3}\left[g^{0\mu}u^{\nu} + g^{0\nu}u^{\mu} + g^{\mu\nu}u^0\right]\right\}\end{gathered} \tag{A.5.4}$$

и т. д.