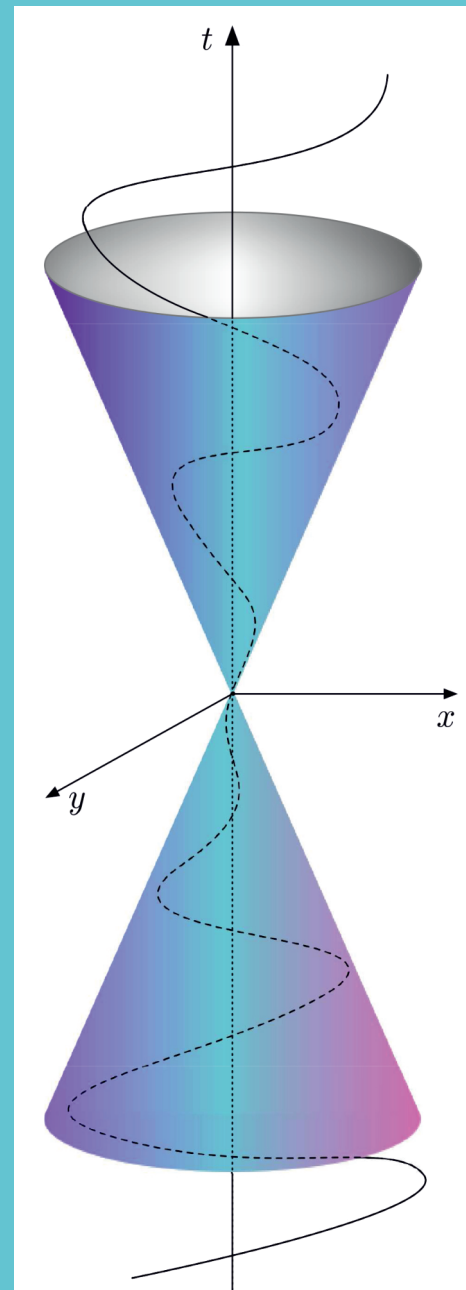




Лобанов А. Е.

ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Релятивистская механика
Электродинамика



**Филиал Московского государственного университета
имени М. В. Ломоносова
в городе Баку**

А. Е. Лобанов

ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

**Релятивистская механика
Электродинамика**

*Учебное пособие по курсу «Физика»
для студентов факультета прикладной математики*

**Баку
2017**

Лобанов А. Е. **Основы теоретической физики.** Релятивистская механика. Электродинамика. — Баку, 2017. 196 с.

Рецензенты:

Э. П. НАХМЕДОВ, д.ф.-м.н. академик НАНА, декан физического факультета филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в городе Баку.

А. В. БОРИСОВ, д.ф.-м.н. профессор кафедры теоретической физики физического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

ISBN 978-9952-8322-3-5

© Лобанов А. Е., 2017

Предисловие

Настоящее учебное пособие написано на основе курса лекций по физике для студентов 4-го курса факультета прикладной математики филиала Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова в городе Баку. В нем рассматриваются вопросы, относящиеся к классической электродинамике и основам специальной теории относительности. Целью курса является ознакомление студентов с основными принципами теоретической физики. Поскольку базовые знания по физике у студентов-математиков ограничены рамками школьной программы, то большее внимание, чем это обычно принято в литературе по теоретической физике, уделяется вопросам методологии и истории науки.

Очень важно при чтении курса физики для студентов-математиков показать, как математические методы работают в естественных науках. Поэтому в пособии подробно разбираются решения ряда конкретных задач. Излагаемый материал, в основном, соответствует содержанию классической книги Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица «Теория поля», которая традиционно считается базовой при изучении электродинамики.

Автор признателен рецензентам А. В. Борисову и Э. П. Нахмедову, которые взяли на себя труд прочитать книгу в рукописи и сделали ряд важных замечаний. Также хотелось бы поблагодарить коллег по работе: В. Ч. Жуковского, Е. М. Мурчикову, И. М. Никонова, В. Н. Сидоренко,

А. И. Слепкова и Г. А. Чижова за плодотворные дискуссии, касающиеся как выбора материала курса, так и особенностей его изложения. Очень приятно, что при подготовке книги к печати большую помощь оказали студенты: Лала Гулиева, которая исполнила весь графический материал, Александра Чухнова, Наталья Балабанова и Игорь Голубев.

Особую благодарность автор выражает руководству филиала МГУ в городе Баку в лице его ректора, академика НАНА профессора Наргиз Пашаевой, за прекрасную организацию учебного процесса и создание таких условий работы профессорско-преподавательского состава, которые способствовали написанию данной книги.

Оглавление

1	Введение	9
1.1	Методология физики	9
1.2	Первичные понятия физики	10
1.3	Структура физических теорий	12
1.4	Классическая электродинамика	19
1.5	Симметрии теории	27
2	Элементы теории групп	29
2.1	Основные понятия	29
2.2	Группа вращений $O(3)$	34
2.3	Неприводимые представления группы вращений	37
3	Основные понятия теории относительности	42
3.1	Принцип относительности Галилея	42
3.2	Группа Галилея	43
3.3	Принцип относительности Эйнштейна	44
3.4	Преобразования Лоренца	45
3.5	Сложение скоростей	48
3.6	Собственное время	51
3.7	Лоренцево сокращение	53

3.8	Аберрация света	54
3.9	Инвариантность интервала	56
3.10	Сверхсветовые скорости	59
3.11	Центр масс	61
4	Группа Лоренца	62
4.1	Пространство Минковского	62
4.2	Определение группы Лоренца	65
4.3	Генераторы группы Лоренца	68
4.4	Неприводимые конечномерные представления	70
4.5	Антисимметричные тензоры	71
5	Релятивистская динамика	76
5.1	Уравнение Лоренца	76
5.2	Свободная частица	81
5.3	Частица в постоянном однородном магнитном поле	82
5.4	Частица в постоянном однородном электрическом поле	83
6	Уравнения электромагнитного поля	87
6.1	Плотность заряда	87
6.2	Уравнение непрерывности	89
6.3	Уравнения Максвелла	90
6.4	Простейшие решения уравнений Максвелла	96
6.5	Преобразование Лоренца для полей	99
6.6	Постоянные однородные поля	102
6.7	Поле плоской монохроматической волны	104
6.8	Отражение плоских волн от зеркала	107
6.9	Поле равномерно движущегося точечного заряда	112

6.10	Единственность решений уравнений Максвелла	115
7	Волновое уравнение	118
7.1	Потенциалы электромагнитного поля	118
7.2	Решения волнового уравнения без токов	120
7.3	Функция Грина волнового уравнения	121
7.4	Неподвижный точечный заряд	125
7.5	Равномерно заряженный шар	125
7.6	Прямой бесконечно длинный провод	128
7.7	Равномерно движущийся точечный заряд	132
7.8	Произвольно движущийся точечный заряд	134
7.9	Энергия электромагнитного поля	139
7.10	Излучение электромагнитных волн	140
8	Метод Лагранжа	146
8.1	Уравнения Лагранжа	146
8.2	Уравнение Гамильтона–Якоби	151
8.3	Свободная частица	155
8.4	Частица в поле неподвижного кулоновского центра	156
8.5	Теорема Нетер	170
8.6	Движение частицы в плосковолновом поле	173
	Приложение	184
A.1	Основные обозначения и определения	184
A.2	Базисы в пространстве Минковского	185
A.3	Свойства антисимметричных тензоров	188
A.4	Инвариантное интегрирование по углам	192
A.5	Соответствие формул	193

Глава 1

Введение

1.1 Методология физики

Физика — наука экспериментальная¹. Именно этими словами начинал свою вступительную лекцию для первокурсников В. С. Фурсов², много лет бывший деканом физического факультета МГУ. С этим утверждением нельзя не согласиться.

Однако цель физики — *предсказание* поведения различных объектов в определенных условиях. Как правило, заранее не известно, какие именно свойства исследуемых объектов будут для этого важны. По меткому замечанию Н. Н. Боголюбова³, физика более сложная наука, чем математика, потому, что в математике «дано» и «требуется доказать», а в физике ничего не дано, а доказывать надо. Именно эти «доказательства» и представляют

¹Автограф лауреата Нобелевской премии 1976 г. С. Тинга на стене аудитории 4-59 кафедры теоретической физики физического факультета МГУ: Physics is an experimental science.

²Разработал принцип фокусировки пучка быстрых частиц в ускорителях, известный как «метод жесткой фокусировки», до Н. Кристофилоса, Э. Куранта, М. Ливингстона и Х. Снайдера. Трижды лауреат Сталинской премии. Парторг ЦК ВКП(б) советского ядерного проекта.

³Выдающийся математик и физик-теоретик. Наиболее известные результаты: цепочки Боголюбова, теория сверхпроводимости, цветные кварки. Лауреат Ленинской, двух Сталинских и одной Государственной премий. Начальник математического отдела советского термоядерного проекта. Директор Объединенного института ядерных исследований (Дубна).

собой физическую теорию.

Построение любой физической теории происходит, как правило, следующим образом. Путем обобщения экспериментальных данных строится «физическая» модель, качественно объясняющая суть того или иного явления. Затем строится «математическая» модель, позволяющая количественно устанавливать связь между наблюдаемыми физическими величинами⁴. Современные математические модели обычно представляют собой систему уравнений — дифференциальных или интегральных. Решение этой системы приводит к предсказанию новых эффектов. Правильность физической теории должна подтверждаться всей совокупностью экспериментальных данных, относящихся к явлениям, вытекающим из нее.

1.2 Первичные понятия физики

При построении теории необходимо ввести первичные понятия. Такого рода понятия невозможно формально определить. Как принято говорить, смысл этих понятий известен «из повседневного опыта». В математике, например, первичными являются понятия множества и функции. Наиболее важными первичными понятиями в физике являются: пространство, время, тело. После введения первичных понятий можно постулировать присущие им свойства. В тех разделах физики, которые будут рассматриваться в нашем курсе, считается, что пространство является *однородным* (эквивалентны все точки пространства), *изотропным* (эквивалентны все направления), и *евклидовым*. Для времени постулируется только однородность.

⁴Физической величиной называется характеристика физического процесса, допускающая численное выражение.

Чтобы различать точки и направления в пространстве, а также моменты времени, вводится понятие системы отсчета. Система отсчета состоит из тела отсчета, связанной с ним координатной системы, а также прибора для измерения времени (часов).

Тела, которые мы будем рассматривать, могут обладать разными свойствами. Наиболее фундаментальный объект — материальная точка. Материальной точкой называется тело, для определения положения которого в пространстве необходимо и достаточно трех чисел (координат радиус-вектора). Абсолютно твердым телом называется объект, состоящий из материальных точек, расстояния между любыми парами которых неизменны во времени. Для определения положения такого тела в пространстве надо задать шесть чисел (например, можно задать положения трех точек такого тела (девять чисел), однако условие неизменности расстояний между точками дает три дополнительных условия, вследствие чего независимы только шесть параметров).

Отсюда следует, что в качестве тела отсчета, фигурирующего в определении системы отсчета, необходимо выбрать абсолютно твердое тело. Действительно, в случае использования декартовой системы координат три числа могут задавать положение начала координат, а другие три — направляющие косинусы координатных осей (всего шесть параметров).

Отметим еще раз, что и материальная точка, и абсолютно твердое тело — это модельные понятия. Реальные макроскопические тела имеют конечные размеры и деформируются. Однако при решении конкретных задач мы должны выбрать ту или иную модель, чтобы использовать соответствующие математические методы. В этом смысле приведенные выше определения являются конструктивными.

1.3 Структура физических теорий

Как и в математике, основой теорий в физике является набор аксиом. Эти аксиомы называются физическими законами. Физические законы представляют собой результат обобщения экспериментальных данных с учетом так называемых «первых принципов». Под первыми принципами мы понимаем такие положения общего характера, в соответствии с которыми устанавливается связь между различными физическими величинами, а также связь между физическими величинами и описывающим их математическим аппаратом. Одним из основных таких принципов является принцип причинности. Также важную роль играют принципы симметрии, что мы обсудим в дальнейшем более подробно.

Кратко (и несколько упрощенно) проиллюстрируем изложенное выше на примере классической механики. Классическая нерелятивистская (ньютоновская) механика основана на трех законах Ньютона. Первый закон постулирует существование инерциальных систем отсчета. Инерциальной называется такая система отсчета, относительно которой любое свободное тело, то есть тело, на которое не действуют другие тела, движется прямолинейно с постоянной (в частности, с нулевой) скоростью. Ясно, что существование хотя бы одной такой системы отсчета обеспечивает существование множества инерциальных систем, которые движутся относительно друг друга с постоянными скоростями.

Второй закон постулирует, что в инерциальной системе отсчета ускорение тела a пропорционально силе F , которая на него действует. Коэффициент пропорциональности m называется массой тела. То есть

$$ma = F. \quad (1.3.1)$$

Это уравнение не несет никакой информации, пока мы не договоримся,

что обозначают входящие в него символы. Традиционно, ускорение — векторная физическая величина, характеризующая изменение скорости тела. Сила — векторная физическая величина, характеризующая действие на тело других тел. Масса — скалярная физическая величина, характеризующая инерционные и гравитационные свойства тела. Эти определения подразумевают введение новых первичных понятий: взаимодействие, инерция, гравитация. Мы знаем (из повседневного опыта), что эти понятия означают. Но даже не зная этого, анализируя данные определения, можно сделать очень серьезные выводы. Самый важный вывод: поскольку m , a , F — физические величины, то им можно приписать численные значения. Сделать это можно, лишь предположив, что они допускают процесс измерения. Следовательно, должны существовать приборы, с помощью которых указанные измерения проводятся⁵. А если это так, то соотношение (1.3.1) должно однозначно связывать между собой результаты измерений, выполненных с помощью не более чем трех различных приборов. При этом по умолчанию предполагается, что указанные измерения могут быть проведены одновременно (уравнение (1.3.1) явно *локально*), причем результаты измерений могут иметь сколь угодно высокую точность.

Масса, будучи свойством тела, инвариантна относительно выбора системы отсчета и постоянна во времени. Более того, масса не может равняться нулю⁶. В противном случае связь между результатами рассматриваемых измерений не будет однозначной. Так как сила характеризует воз-

⁵В курсе элементарной физики объясняется, что ускорение можно измерить, используя линейку и часы, массу можно измерить с помощью рычажных весов, а силу — с помощью динамометра. Необходимо понимать, что реальные современные приборы, служащие для этих целей, несколько отличаются от изображенных на картинках в соответствующих учебниках.

⁶В релятивистской механике возможно рассмотрение тел с нулевой массой. И такие объекты реально существуют. Это — фотоны в вакууме.

действие на тело, то она должна быть инвариантной относительно выбора системы отсчета, вне зависимости от того, является ли система отсчета инерциальной или нет⁷.

Дальнейший анализ более нагляден, если для описания тела выбрать модель материальной точки⁸. В этом случае положение тела определяется радиус-вектором \mathbf{R} , скорость тела \mathbf{v} определяется первой производной радиус-вектора по времени $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}$, а ускорение — второй производной $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{R}}$. Следовательно, уравнение (1.3.1) можно переписать так:

$$m\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}. \quad (1.3.2)$$

Поскольку результаты трех возможных измерений жестко связаны между собой соотношением (1.3.2), то для получения полной информации о движении тела, по крайней мере, в инерциальной системе отсчета, достаточно лишь двух измерительных приборов. Будем использовать лишь «линейку и часы», а также «рычажные весы», исключив из списка необходимого оборудования «динамометр». Это предположение приводит к выводу, что сила должна зависеть исключительно от массы тела, а также его положения в пространстве \mathbf{R} , скорости \mathbf{v} и времени явно⁹. Отсюда следует, что

$$m\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}, t). \quad (1.3.3)$$

Соотношение (1.3.3) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Как хорошо известно, общее решение

⁷ Действительно, выбор системы отсчета определяет лишь способ наблюдения и, следовательно, не может влиять на характер взаимодействия.

⁸ Произвольное тело можно рассматривать как совокупность материальных точек.

⁹ Вторая производная от радиус-вектора $\ddot{\mathbf{R}}$ определяется уравнением (1.3.2). Предположение о зависимости силы от старших производных указывает на нелокальный характер взаимодействия. Примером может служить так называемое «торможение излучением». К сожалению, обсуждение такого рода явлений выходит за рамки нашего курса.

такой системы зависит от шести параметров. В качестве начальных условий задачи Коши можно выбрать координаты точки \mathbf{R}_0 и скорость $\dot{\mathbf{R}}_0$ в момент времени $t = 0$. Таким образом, закон движения материальной точки, то есть зависимость ее радиус-вектора от времени, имеет вид:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(t; \mathbf{R}_0, \dot{\mathbf{R}}_0). \quad (1.3.4)$$

Очевидно, что выводы, изложенные выше, можно распространить на описание движения любого тела, или системы тел. В частности, если рассматривать систему, состоящую из N материальных точек, то число начальных условий составит $6N$. Как принято говорить, имеется два начальных условия на каждую степень свободы системы.

Третий закон Ньютона связывает силы взаимодействия между различными телами. Постулируется, что если первое тело действует на второе с силой \mathbf{F}_{12} , то второе действует на первое с силой

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}. \quad (1.3.5)$$

Так же как и второй закон, соотношение (1.3.5) допускает комментарии. Отметим следующие обстоятельства. Тело может взаимодействовать с несколькими телами одновременно. Третий закон при этом выполняется для всех парных взаимодействий. Утверждение о том, что силы \mathbf{F}_{12} и \mathbf{F}_{21} направлены вдоль одной прямой, справедливо, вообще говоря, только для двух материальных точек¹⁰. В качестве примера можно рассмотреть взаимодействие точечного заряда с электрическим диполем. Для этого нужно воспользоваться законом Кулона, который мы обсудим позже. Картина взаимодействия изображена на Рис.1.1.

¹⁰Еще раз подчеркнем, что любое тело можно рассматривать как совокупность материальных точек. В формализме аналитической механики как второй, так и третий законы Ньютона постулируются именно для материальных точек. См., например, Ф. Р. Гантмахер, *Лекции по аналитической механике*, М., Наука (2005).

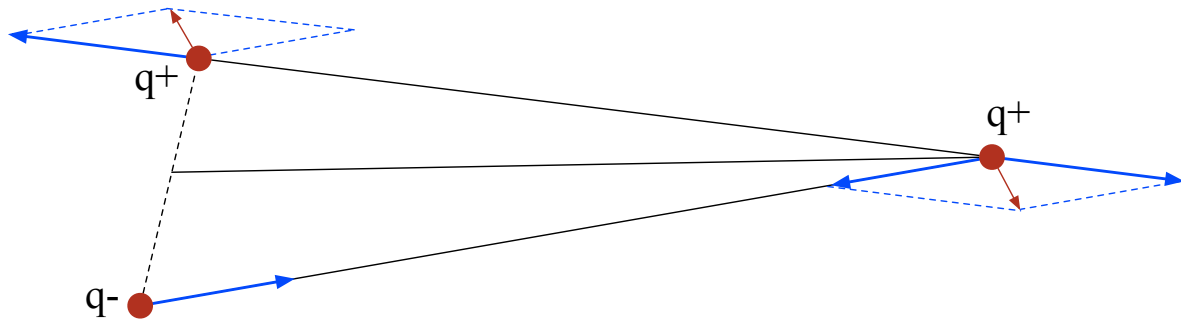


Рис. 1.1:

Силы, которые связывает третий закон, имеют одинаковую природу, но относятся к разным телам. Отсюда следует важный вывод: взаимодействие между телами происходит мгновенно. Действительно, по умолчанию, силы, фигурирующие в (1.3.5), измеряются в один и тот же момент времени, каково бы ни было расстояние между телами.

Реально взаимодействие на расстоянии осуществляется за счет полей (электромагнитных, гравитационных), которые создаются телами и которые распространяются с конечной скоростью. Следовательно, в нерелятивистской механике эффект запаздывания не учитывается. Тем не менее, вполне возможно описание движения тела в заданном поле. При этом предполагается, что исследуемое тело (практически) не влияет на систему, создающую поле¹¹. Такой подход определяет концепцию «внешнего поля», которая при определенных условиях работает и в релятивистских теориях, причем не только в классических, но и в квантовых.

На этом мы заканчиваем краткий анализ постулатов нерелятивистской механики. В связи с вышеизложенным, нельзя не вспомнить соображения,

¹¹И в этом случае третий закон формально не нарушается. Рассматриваемая ситуация отвечает бесконечно большой массе внешней системы и ее бесконечно малому ускорению. Поэтому в уравнении второго закона, записанного для этой системы, возникает неопределенность, вследствие которой силе, действующей на систему, можно приписать любое значение, в том числе и отвечающее третьему закону.

высказанные Л. И. Мандельштамом в его известных лекциях¹²: «Какова структура всякой физической теории, всякого физического построения вообще? Немного схематично (как всегда) можно сказать, что всякая физическая теория состоит из двух дополняющих друг друга частей. Я начну с того, что можно считать второй частью. Это *уравнения* теории — уравнения Максвелла, уравнения Ньютона, уравнение Шредингера и т. д. Уравнения — это просто математический аппарат. В эти уравнения входят некоторые символы: x, y, z и t , векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} и т. д. На этом вторая часть заканчивается. Здесь еще нет никакой физической теории. Это математика, а не естественная наука. Первую же часть физической теории составляет связь этих символов (величин) с физическими объектами, связь, осуществляемая по *конкретным* рецептам (конкретные вещи в качестве эталонов и конкретные измерительные процессы — определение координаты, времени и т. д. при помощи твердых масштабов, часов и т. д.).

Первая часть учит, как рациональным образом отнести к объектам природы определенные величины — большей частью в виде чисел. Вторая часть устанавливает математические соотношения между этими величинами. Тем самым, ввиду связи этих величин с реальными объектами, формулируются соотношения и между этими последними, что и является конечной целью теории. Без первой части теория иллюзорна, пуста. Без второй вообще нет теории. Только совокупность двух указанных сторон дает физическую теорию».

¹²Л. И. Мандельштам, *Лекции по основам квантовой механики*. В книге: Л. И. Мандельштам, Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике, М., Наука (1972). Как хорошо известно, Л. И. Мандельштам и Г. С. Ландсберг, работая в МГУ, открыли комбинационное рассеяние света. Это явление в западной литературе называется эффектом Рамана, в честь Ч. В. Рамана, который также его открыл и получил за это Нобелевскую премию по физике в 1930 г. (См. В. Л. Гинзбург, И. Л. Фабелинский, *Вестник РАН*, 73, 215 (2003)).

На примере классической механики мы проиллюстрировали то, что относится к «первой части» структуры физических теорий. Однако без «второй части» физической теории просто нет. Поэтому несколько слов о математическом аппарате. Фантастическая эффективность математических методов при решении физических проблем поразительна. Причем многие из этих методов были разработаны физиками. Не случайно В. И. Арнольд определил математику как раздел физики, в котором эксперименты дешевы¹³.

С другой стороны, с течением времени разделы математики, которые, как казалось, описывают чисто абстрактные понятия, становятся рабочим инструментом физики. В качестве одного из примеров можно вспомнить некоторые топологические конструкции, с помощью которых в настоящее время объясняются как особенности поведения твердых тел, так и явления, происходящие в микромире.

Об эффективности использования математики писали П. А. М. Дирак¹⁴, Е. Вигнер¹⁵ и другие классики науки. Почему существующая математика столь успешно работает применительно к физике, единого мнения нет. Наиболее радикальное объяснение этого явления основывается на так называемом «антропном принципе», одним из следствий которого является вывод, что поскольку человек является частью природы, то и человеческая логика должна природе соответствовать.

¹³См. В. И. Арнольд, *Что такое математика?* М., МЦНМО (2002). Несмотря на несколько эпатажный стиль данной работы, а также имеющиеся неточности, ее чтение весьма поучительно.

¹⁴Автограф лауреата Нобелевской премии 1933 г. П. А. М. Дирака на стене аудитории 4-59 кафедры теоретической физики физического факультета МГУ: Physical law should have mathematical beauty.

¹⁵См. Е. Вигнер, *Непостижимая эффективность математики в естественных науках*. В книге: Е. Вигнер, *Этюды о симметрии*, М., Мир (1971).

1.4 Классическая электродинамика

В реальных экспериментах взаимодействие изучаемой физической системы с прибором приводит к изменению состояния прибора, что и трактуется как измерение физической величины. Однако при таком взаимодействии и прибор оказывает влияние на состояние исследуемого объекта. Это очевидное обстоятельство учитывается в теориях, которые принято называть квантовыми. Если же этим обстоятельством пренебречь, то мы приходим к теориям, которые принято называть классическими. Только такие теории рассматривались вплоть до начала XX века. Подчеркнем, что предположение о возможности проводить измерения, фактически не меняя состояния изучаемой системы, накладывает ограничения на пределы применимости этих теорий. Очевидно, они должны хорошо работать при изучении макроскопических систем. Когда же речь идет о системах микроскопических, то есть при рассмотрении таких объектов как атомы и молекулы, их точность уже недостаточна.

Такой теорией является и классическая электродинамика. Основные уравнения классической электродинамики были получены Дж. Максвеллом во второй половине XIX века. Эти уравнения являются обобщением экспериментальных данных и математических построений, опубликованных в работах М. Фарадея, Ш. О. Кулона, А. Вольта, А. М. Ампера и других исследователей.

Основными понятиями классической электродинамики являются понятия электромагнитного поля и электрического заряда. Поле создается зарядами и воздействует на них. Считается, что могут существовать настолько малые заряды, что их внесение в заданное поле абсолютно не меняет его вида. Такие заряды называются *пробными*.

Одним из экспериментальных фактов, послуживших основой классической электродинамики, является закон Кулона: два точечных заряженных тела, неподвижные относительно избранной инерциальной системы отсчета, взаимодействуют между собой с силой, прямо пропорциональной их зарядам q_1, q_2 и обратно пропорциональной квадрату расстояния R между ними:

$$\mathbf{F} = k \frac{q_1 q_2}{R^2} \mathbf{n}.$$

Здесь \mathbf{n} — единичный вектор, направленный от одного заряда к другому, а коэффициент k зависит от выбора системы единиц. В дальнейшем мы будем использовать систему единиц СГС (гауссову), в которой основными единицами являются сантиметр, грамм и секунда¹⁶. В этой системе единиц коэффициент $k = 1$.

Фактически, результаты опытов Кулона, основанных на применении так называемых крутильных весов, только *не противоречили* гипотезе о том, что сила взаимодействия между зарядами обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Тем не менее, хотя эти эксперименты были не слишком точными, «закон Кулона» был доброжелательно воспринят научной общественностью того времени. Дело в том, что такая же зависимость от расстояния между телами наблюдалась и для гравитационного взаимодействия (закон всемирного тяготения Ньютона), причем эта зависимость подтверждалась многовековыми астрономическими наблюдениями. Следовательно, гипотеза Кулона согласовывалась с представлениями

¹⁶Во введении мы воспользуемся системой СИ, которая применяется в школьном курсе. В системе СИ $k = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$, где $\epsilon_0 \approx 8,85418781762039 \times 10^{-12} \text{ м}^{-3}\text{кг}^{-1}\text{сек}^4 \text{ А}^2$ — так называемая электрическая постоянная (диэлектрическая проницаемость вакуума). Отметим, что возникновение размерного коэффициента ϵ_0 связано с тем, что в системе СИ имеется независимый эталон для силы тока. Как известно, в СИ единица силы тока — ампер (A).

о единстве картины мира¹⁷.

Необходимо отметить, что и в настоящее время прямая проверка закона Кулона, основанная на механических измерениях, весьма сложна. Поэтому его правильность подтверждается при проверке его следствий. Первым такого рода проверку (еще до опытов Кулона) осуществил блестящий экспериментатор Г. Кавендиш. На примере опыта Кавендиша мы рассмотрим, как результаты экспериментов по прямой проверке основ теории могут быть подтверждены косвенно.

Как хорошо известно еще из курса элементарной физики, все тела могут быть разделены на два больших класса: проводники и диэлектрики¹⁸. Проводниками называются тела, которые состоят из вещества, в котором есть свободные носители заряда, то есть объекты, которые под действием электрического поля начинают ускоряться. Для металлов такими носителями являются электроны проводимости.

Прежде чем мы установим элементарные свойства проводников, формулируем так называемую электростатическую теорему Гаусса. Разумеется, эта теорема является следствием математической теоремы Гаусса–Остроградского, согласно которой поток вектора через замкнутую поверхность равен интегралу от дивергенции данного вектора по объему, ограниченному указанной поверхностью.

Определим напряженность электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t)$ как силу, действующую на единичный пробный заряд q_0 со стороны других зарядов,

¹⁷По-видимому, определенную роль сыграл и высочайший авторитет И. Ньютона, хотя именно с Ньютона физика стала настоящей наукой, в которой правильность результатов подтверждается логическими построениями, основанными на экспериментальных фактах, а не ссылкой на авторитетных коллег.

¹⁸Данные последнего времени, в частности открытие топологических диэлектриков, указывают на то, что не все так просто. См., например, S. Q. Shen, *Topological Insulators*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2012).

то есть $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q_0$. Если зависимость напряженности поля от времени отсутствует, то указанная величина характеризует электростатическое поле. Для поля точечного заряда q , в соответствии с законом Кулона,

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{n}. \quad (1.4.1)$$

Пусть, для определенности, точечный заряд находится в начале координат. Тогда $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Используя обобщенные функции¹⁹, получаем

$$\operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{n}}{R^2} \right) = 4\pi\delta^3(\mathbf{x}) \equiv 4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z). \quad (1.4.2)$$

Чтобы убедиться в этом, можно явно вычислить поток вектора (1.4.1) через сферическую поверхность с центром в начале координат. Используем принцип суперпозиции, который гласит, что поле, создаваемое несколькими зарядами, представляет собой сумму полей, которые создаются каждым зарядом. Тогда для системы точечных зарядов получаем, что поток вектора $\mathbf{E}(\mathbf{R})$ через замкнутую поверхность, с точностью до постоянного коэффициента, обусловленного использованием системы единиц СИ, равен полному электрическому заряду Q , находящемуся внутри этой поверхности:

$$\Phi_{\mathbf{E}} = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Это утверждение и есть электростатическая теорема Гаусса²⁰.

¹⁹Обобщенными функциями называются функционалы, определенные на пространстве бесконечно гладких функций с финитным носителем $\psi(x)$. Дельта-функцией Дирака $\delta(x)$ называется функционал, обладающий свойством $\int \psi(x)\delta(x)dx = \psi(0)$. Название этой функции является одним из примеров, подтверждающих так называемую нулевую теорему истории науки, известную в математических кругах как «принцип Арнольда»: очень часто открытие, приписываемое какому-то лицу, было сделано другим исследователем. См., например, J. D. Jackson, *Am. J. Phys.*, **76**, 704 (2008).

²⁰Отметим, что электростатическая теорема Гаусса представляет собой одно из уравнений Максвелла, которые в классической электродинамике играют ту же роль, что и законы Ньютона в механике. Как закон Кулона, так и принцип суперпозиции являются их следствиями.

Теперь рассмотрим свойства проводников.

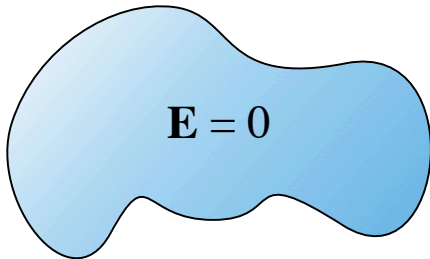


Рис. 1.2:

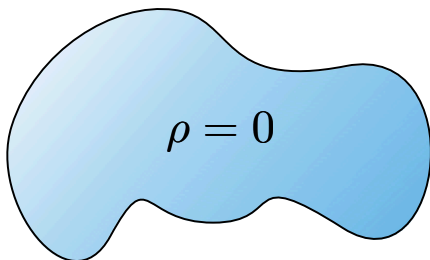


Рис. 1.3:

I. Электростатическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{R})$ в толще проводника равно нулю. Докажем от противного. Пусть $\mathbf{E}(\mathbf{R}) \neq 0$. Тогда под действием поля свободные носители начнут движение, и создаваемое ими поле будет зависеть от времени. Что и требовалось доказать.

II. Избыточный заряд ρ не может быть локализован в толще заряженного проводника. Для доказательства этого утверждения построим поверхность, полностью находящуюся внутри проводника. В соответствии с теоремой Гаусса, поток вектора $\mathbf{E}(\mathbf{R})$ через указанную поверх-

ность равен полному заряду, находящемуся внутри нее. В силу свойства I этот заряд равен нулю. Следствие: избыточный заряд локализуется на поверхности проводника.

Определим электростатический потенциал $\varphi(\mathbf{R})$ как величину, численно равную работе электрического поля по перемещению единичного положительного пробного заряда из точки \mathbf{R} на бесконечность. Для точечного заряда потенциал определяется формулой

$$\varphi(\mathbf{R}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R},$$

которую можно получить, проинтегрировав (1.4.1).

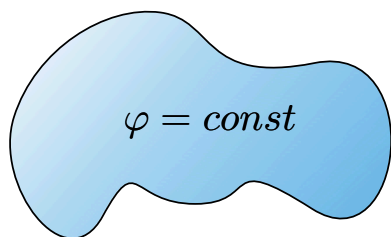


Рис. 1.4:

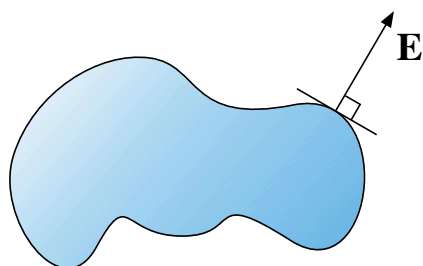


Рис. 1.5:

составляющей приводит к тому, что работа по перемещению пробного заряда вдоль поверхности проводника не равна нулю. А это противоречит свойству III.

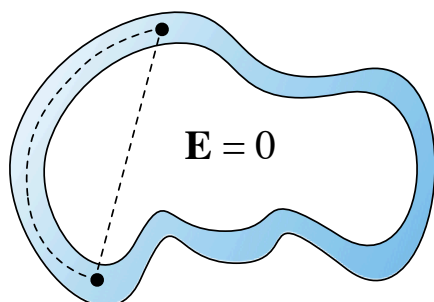


Рис. 1.6:

III. Все точки проводника имеют один и тот же потенциал, то есть для всех точек проводника $\varphi(\mathbf{R}) = \text{const}$. Действительно, так как напряженность поля внутри проводника равна нулю, то и работа по перемещению пробного заряда из одной точки проводника в другую равна нулю.

IV. Вектор напряженности электрического поля в любой точке поверхности проводника ортогонален касательной плоскости, построенной к этой точке. Предположим, что это не так. Тогда вектор напряженности поля $\mathbf{E}(\mathbf{R})$ можно разложить на нормальную и тангенциальную составляющие. Наличие тангенциальной

V. Рассмотрим заряженный проводник, имеющий полость. Утверждение: напряженность электростатического поля внутри полости равна нулю. Так как в толще проводника поле отсутствует, то внутри полости «силовые линии» поля начинаются и кончаются в точках внутренней поверхности проводника, причем

выходят из проводника (входят в проводник) перпендикулярно касательным плоскостям, построенных в этих точках. Следовательно, работа по перемещению пробного заряда вдоль этих силовых линий не может равняться нулю. Однако это противоречит свойству III.

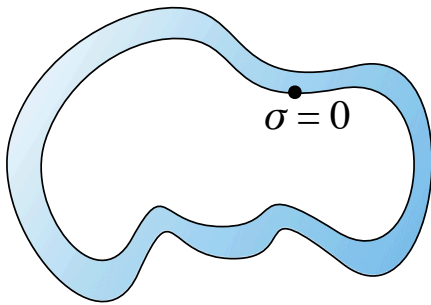


Рис. 1.7:

VI. Поверхностный заряд σ на внутренней поверхности проводника отсутствует. Построим поверхность, частично находящуюся в толще проводника, а частично — в полости. В соответствии с теоремой Гаусса, поток вектора $\mathbf{E}(\mathbf{R})$ через указанную поверхность равен полному заряду, находящемуся внутри нее.

Поскольку в силу свойств I и V во всех точках этой поверхности поле равно нулю, то мы приходим к выводу, что на внутренней поверхности полого проводника заряд отсутствует. Следовательно, весь избыточный заряд находится на его внешней поверхности.

Идея опыта Кавендиша состоит в следующем. Возьмем проводящую емкость с крышкой (кастрюлю). Просверлим в ней небольшое отверстие, через которое заведем в нее провод. Припаем провод к внутренней стенке указанной емкости. Проводник через ключ и гальванометр выведем на землю (см. Рис.1.8). Открыв крышку, нанесем на стенку емкости, используя дополнительный проводник (проводящий шарик на изолирующей ручке), электрический заряд (см. Рис.1.9). Этот заряд может быть получен с помощью электрофорной машины²¹. После удаления шарика из ка-

²¹Также можно применить проверенный веками метод, при котором заряд добывается путем трения диэлектрика о шерсть животных. См. В. В. Маяковский, «Владимир Маяковский. Трагедия». В книге: В. В. Маяковский, Полное собрание сочинений в 13 томах, том 1, М., Художественная литература (1955).

струли и закрывания ее крышкой, замкнем ключ (см. Рис.1.10). Очевидно, что стрелка гальванометра не отклонится. Это связано с тем, что в силу свойства VI, заряд на внутренней поверхности емкости будет отсутствовать.

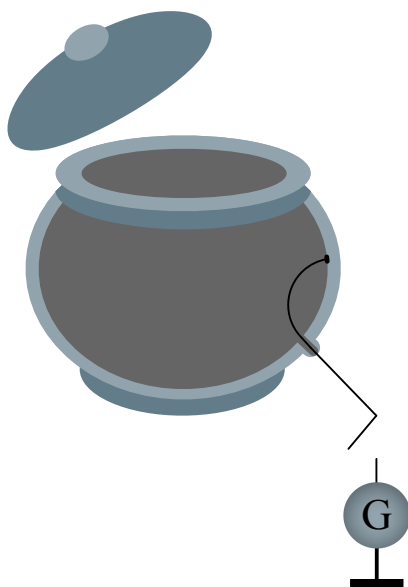


Рис. 1.8:

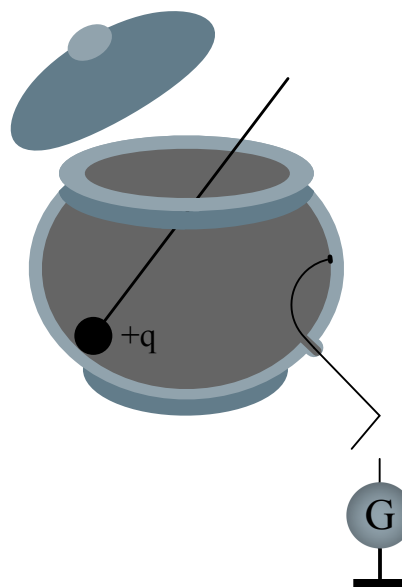


Рис. 1.9:

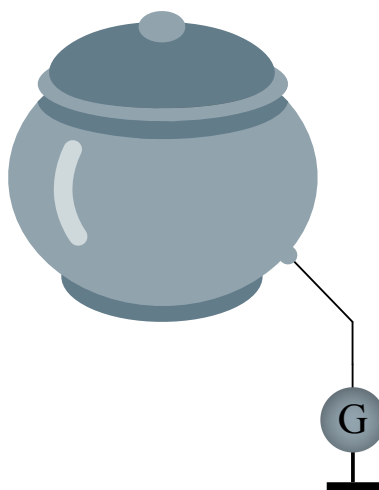


Рис. 1.10:

Таким образом подтверждается справедливость закона Кулона. Действительно, рассматривая свойства проводников мы использовали электростатическую теорему Гаусса, справедливость которой связана с изменением напряженности электрического поля обратно пропорционально квадрату расстояния от заряда. Если бы закон изменения напряженности был другим, то ток через гальванометр обязательно бы проходил при замыкании ключа в описанной схеме. Причем величина протекшего заряда, и, как следствие, пиковое значение силы тока, зависело бы от размера установки (то есть кастрюли). Необходимо отметить, что, даже при кустарном выполнении этого опыта, его точность весьма высока. И, безусловно, она значительно выше точности экспериментов Кулона.

1.5 Симметрии теории

Вернемся к анализу математического аппарата физики. Структура уравнений теории не может быть произвольной. Она должна учитывать пространственно-временные симметрии взаимодействий.²²

В качестве примера вновь рассмотрим уравнение второго закона Ньютона. Так как пространство считается изотропным, то уравнение не должно изменять свой вид при вращениях координатной системы, связанной с выбранной нами системой отсчета. Чтобы добиться этого, при записи уравнения $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ предполагается, что в нем как слева, так и справа стоят векторы. Это и обеспечивает ковариантность уравнения второго закона относительно пространственных вращений, поскольку, по определению, трехмерный вектор — это геометрический объект, компоненты которого

²²Кроме пространственно-временных симметрий можно рассматривать и так называемые внутренние симметрии теории. Особую роль они играют в физике высоких энергий.

преобразуются при вращениях как координаты отрезка.

В общем случае, уравнения теории должны связывать между собой только такие физические величины, которые трансформируются при преобразованиях симметрии одинаковым образом. Другими словами это требование можно сформулировать так: входящие в уравнения физические величины с точки зрения математики должны принадлежать пространству одного и того же неприводимого представления соответствующей группы симметрии²³.

Изучение симметрий теории важно еще и потому, что вследствие фундаментальной теоремы Э. Нетер, которую мы рассмотрим к концу нашего курса, инвариантность теории относительно непрерывного преобразования симметрии порождает интеграл движения. Поэтому, прежде чем приступить к изучению основного материала курса, мы определим, что такое группы и их представления.

²³Исследование симметрий в физике с точки зрения теории групп стало особенно актуальным после создания квантовой механики. Названия первых книг, посвященных изучению этого вопроса и ставших классическими, говорят сами за себя. См. Г. Вейль, *Теория групп и квантовая механика*, М., Наука (1986); Е. Вигнер, *Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров*, М., Издательство иностранной литературы (1961).

Глава 2

Элементы теории групп

2.1 Основные понятия

Здесь мы приводим в упрощенном виде минимально необходимые для дальнейшего сведения из теории групп¹.

Группа — непустое множество G с определённой на нём бинарной операцией (умножением), удовлетворяющей указанным ниже аксиомам:

1) $\forall (g_1, g_2) \in G \Rightarrow g_1 g_2 \in G$, то есть множество замкнуто относительно введенной операции.

2) ассоциативность: $\forall (g_1, g_2, g_3) \in G \Rightarrow (g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$.

3) наличие единичного элемента: $\exists e \in G : eg = ge = g$.

4) наличие обратного элемента: $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G : gg^{-1} = g^{-1}g = e$, причем элемент g^{-1} единственен.

Если все элементы группы коммутируют, то есть $\forall (g_1, g_2) \in G \Rightarrow g_1 g_2 = g_2 g_1$, то группа называется *абелевой*.

¹Литература, посвященная теории групп, весьма обширна. Для первого ознакомления с приложениями теории групп к физике можно прочитать книгу, написанную на «старом» математическом языке: М. Хаммермерш, *Теория групп и ее применение к физическим проблемам*, М., Мир (1966). Серьезное изложение материала и многочисленные ссылки на оригинальные работы содержатся в книге: А. Барут, Р. Рончка, *Теория представлений групп и ее приложения*, М., Мир (1980).

Подгруппа — подмножество H группы G , представляющее собой группу относительно той же операции умножения, что и группа G .

Нормальный делитель (инвариантная подгруппа) — подгруппа N группы G , обладающая свойством: $\forall g \in G, \forall n \in N \Rightarrow gng^{-1} \in N$.

Центр группы — множество элементов группы G , коммутирующих со всеми элементами группы G . Очевидно, что центр представляет собой инвариантную абелеву подгруппу.

Представление группы. Пусть G — заданная группа, W — линейное пространство. Представление группы G — это отображение (гомоморфизм), ставящее в соответствие каждому элементу $g \in G$ невырожденное линейное преобразование (оператор) $A_g : W \rightarrow W$, причем выполняются свойства: $\forall (g, h) \in G \Rightarrow A_{gh} = A_g A_h, A_{g^{-1}} = A_g^{-1}$.

Неприводимое представление — представление, для которого не существует нетривиальных подпространств в пространстве представления, инвариантных относительно операторов представления. Если такие подпространства существуют, то представление называется приводимым.

Унитарное представление — представление унитарными операторами, то есть операторами, сохраняющими эрмитову положительно определенную билинейную форму (скалярное произведение).

Лемма Шура: любой оператор, коммутирующий со всеми операторами неприводимого представления, кратен единичному.

Группы Ли². Введем понятие линейной группы Ли. Для этого рассмотрим линейное пространство над полем вещественных или комплексных чисел, имеющее размерность n . Любое линейное преобразование в нем

²Группой Ли над полем \mathbb{R} (или \mathbb{C}) называется группа G , снабжённая структурой гладкого многообразия над данным полем, причём отображения произведения ее элементов $(g_1, g_2) \rightarrow g_1 g_2$ и взятия обратного $g \rightarrow g^{-1}$ являются гладкими (в случае поля \mathbb{C} — аналитическими) отображениями.

можно задать с помощью невырожденной матрицы $n \times n$. Эти матрицы составляют общие линейные группы $GL(n, \mathbb{R})$ или $GL(n, \mathbb{C})$.

1. Пусть группа G представляет собой подгруппу одной из этих групп.
2. Пусть существует такая окрестность единичной матрицы, в которой элементы группы G представляются матрицами с элементами g_{ij} , которые представляют собой гладкие функции от p вещественных параметров x_1, x_2, \dots, x_p .

3. Ранг матрицы $\left(\frac{\partial g_{(ij)}}{\partial x_k}\right)$, имеющей размерность $n^2 \times p$, равен p , то есть эта матрица невырождена.

Невырожденные матрицы $n \times n$, у которых p элементов функционально независимы, определяют действие некоторой p -параметрической линейной группы Ли.

Зафиксируем все параметры группы, кроме одного; обозначим его t_i . Можно показать, что существует так называемая каноническая параметризация, для которой выполняется

$$g(t_i) g(t'_i) = g(t_i + t'_i). \quad (2.1.1)$$

Тогда, изменяя этот параметр, мы получим совокупность матриц, образующую однопараметрическую подгруппу:

$$g(t_i) \in G, \quad g(0) = e, \quad (2.1.2)$$

причем эта подгруппа абелева. Очевидно, что можно построить p таких подгрупп g_i , определяемых каноническими параметрами t_i , $i = 1, 2, \dots, p$.

Продифференцируем элементы группы по параметрам t_i в окрестности единицы группы³:

$$X_i = \left. \frac{\partial g_i(t_i)}{\partial t_i} \right|_{t_i=0}. \quad (2.1.3)$$

³Вследствие соотношения (2.1.1) единице группы соответствуют нулевые значения всех параметров.

Эти производные называются *генераторами (инфинитезимальными операторами)*. Для каждой однопараметрической подгруппы имеет место экспоненциальное представление

$$g_i(t) = e^{X_i t} = I + tX_i + \frac{t^2}{2}X_i^2 + \dots \quad (2.1.4)$$

Любой элемент группы можно представить как экспоненту от линейной комбинации генераторов при надлежащем подборе значений параметров t_i . Необходимо подчеркнуть, что линейные группы Ли можно восстановить таким способом глобально. Для групп Ли общего вида, которые мы не рассматриваем, экспоненциальное представление определяет группу только локально (в окрестности ее единичного элемента).

Алгебра Ли — совокупность всех генераторов группы L , для которых введено произведение Ли $[X_i, X_j]$, удовлетворяющее указанным ниже аксиомам:

1. $\forall (X_i, X_j, X_k) \in L \Rightarrow [\alpha X_i + \beta X_j, X_k] = \alpha[X_i, X_k] + \beta[X_j, X_k]$,
где α, β — вещественные или комплексные числа (линейность).
2. $\forall (X_i, X_j) \in L \Rightarrow [X_i, X_j] = -[X_j, X_i]$ (антисимметричность).
3. $\forall (X_i, X_j, X_k) \in L \Rightarrow [X_i, [X_j, X_k]] + [X_j, [X_k, X_i]] + [X_k, [X_i, X_j]] = 0$
(тождество Якоби).

Предполагается, что произведение Ли замкнуто, то есть⁴

$$[X_i, X_j] = \alpha_{ij}^k X_k. \quad (2.1.5)$$

Параметры α_{ij}^k называются структурными константами алгебры Ли. Именно структурные константы определяют тип алгебры, а соотношение (2.1.5) задает для нее «таблицу умножения».

⁴Здесь и далее мы считаем, что по повторяющимся индексам производится суммирование.

Здесь используется хотя и упрощенное, но конструктивное и удобное для физических приложений определение алгебры Ли. Поскольку мы ограничиваемся рассмотрением только линейных групп, то генераторы представляют собой матрицы, а экспоненциальное представление элементов групп — это матричные экспоненты, которые определяются разложением в ряд Тейлора. Произведение Ли есть просто коммутатор матриц, а замкнутость произведения Ли (2.1.5) означает, что коммутаторы — это линейные комбинации генераторов. Последнее утверждение элементарно проверяется. Действительно, зададим элементы группы следующего вида:

$$g_t = e^{\tau X_i t_i}, \quad g_s = e^{\tau X_j s_j} \quad i, j = 1, 2, \dots, p, \quad (2.1.6)$$

где τ , а также t_i, s_j — параметры. Рассмотрим элемент группы

$$g = g_s^{-1} g_t^{-1} g_s g_t. \quad (2.1.7)$$

Раскладывая матричные экспоненты с точностью до квадратичных по τ членов, получаем

$$\begin{aligned} g &= \left(I - \tau s_j X_j + \frac{\tau^2 s_j^2}{2} X_j^2 + \dots \right) \left(I - \tau t_i X_i + \frac{\tau^2 t_i^2}{2} X_i^2 + \dots \right) \times \\ &\times \left(I + \tau s_j X_j + \frac{\tau^2 s_j^2}{2} X_j^2 + \dots \right) \left(I + \tau t_i X_i + \frac{\tau^2 t_i^2}{2} X_i^2 + \dots \right) \approx \\ &\approx I + \tau^2 [s_j X_j, t_i X_i]. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Так как элемент g можно представить в виде матричной экспоненты от линейной комбинации генераторов X_k с некоторыми коэффициентами r_k , то

$$[s_j X_j, t_i X_i] = r_k X_k, \quad (2.1.9)$$

что и требовалось доказать. С данным обстоятельством и связан выбор антисимметричного произведения Ли, поскольку обычное произведение генераторов, вообще говоря, не сводится к их линейным комбинациям.

Завершающим штрихом в нашем рассуждении служит отсылка к теореме Адо–Ивасава, которая утверждает, что любая конечномерная алгебра Ли изоморфна некоторой матричной алгебре Ли. К счастью, в математическом аппарате физических теорий, имеющих на настоящий момент хоть какое-то экспериментальное подтверждение, используются только конечномерные алгебры Ли.

Представление алгебры Ли — отображение генераторов в операторы, действующие в каком-либо линейном пространстве. При этом требуется, чтобы произведение Ли для операторов, реализующих представление, сводилось к коммутаторам этих операторов.

Обертывающая алгебра — совокупность всех полиномов, построенных на элементах алгебры Ли. Произведение операторов, входящих в данные полиномы, определено обычным образом.

Оператор Казимира (полиномиальный инвариант) — элемент χ обертывающей алгебры, коммутирующий со всеми элементами алгебры Ли $[\chi, X_i] = 0$. Если представление неприводимо, то вследствие леммы Шура χ кратен единичному оператору $\chi = aI$. Поэтому, если мы найдем все операторы Казимира для данной алгебры Ли и определим их спектры, то мы получим все возможные неприводимые представления алгебры Ли, и, следовательно, соответствующей линейной группы Ли.

2.2 Группа вращений $O(3)$

Очевидно, что в трехмерном евклидовом пространстве преобразования, сохраняющие скалярное произведение векторов, образуют группу. Эта группа называется группой вращений и обозначается символом $O(3)$. Она состоит из всевозможных вращений и отражений элементов простран-

ства (векторов) относительно выбранной точки (начала координат)⁵.

Неизменность скалярного произведения означает, что матрица, задающая преобразование координат

$$x_i \rightarrow x'_i = \mathcal{R}_{ij}x_j,$$

должна быть ортогональной:

$$x'_iy'_i = \mathcal{R}_{ij}x_j\mathcal{R}_{ik}y_k = x_iy_i \Rightarrow \mathcal{R}_{ij}\mathcal{R}_{ik} = \delta_{jk} \Rightarrow \mathcal{R}\mathcal{R}^T = I,$$

где I — единичная матрица. Так как $\text{Det } \mathcal{R} = \text{Det } \mathcal{R}^T$, то из ортогональности следует, что $\text{Det}(\mathcal{R}) = \pm 1$. Преобразования с $\text{Det } \mathcal{R} = +1$ образуют подгруппу в $O(3)$, так как если $\text{Det } \mathcal{R}_1 = \text{Det } \mathcal{R}_2 = 1$, то $\text{Det } \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 = \text{Det } \mathcal{R}_1 \text{Det } \mathcal{R}_2 = 1$. Эта подгруппа называется группой собственных вращений. Она не содержит отражений осей координат и обозначается $SO(3)$.

Обозначим матрицу, задающую поворот на угол ϕ_3 вокруг третьей оси, как $\mathcal{R}_3(\phi_3)$:

$$\mathcal{R}_3(\phi_3) = \begin{pmatrix} \cos \phi_3 & -\sin \phi_3 & 0 \\ \sin \phi_3 & \cos \phi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.1)$$

Очевидно, что совокупность таких матриц со всевозможными ϕ_3 образует однопараметрическую подгруппу. Параметр ϕ_3 — канонический, так как

$$\mathcal{R}_3(\phi_3)\mathcal{R}_3(\phi'_3) = \mathcal{R}_3(\phi_3 + \phi'_3).$$

⁵Это «активная» точка зрения на группу $O(3)$. С «пассивной» точки зрения $O(3)$ состоит из всевозможных вращений и отражений осей координат относительно выбранной точки. Соответствующие преобразования задаются обратными матрицами.

Поэтому соответствующий генератор

$$R_3 = \left. \frac{\partial \mathcal{R}_3}{\partial \phi_3} \right|_{\phi_3=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.2)$$

Аналогично можно получить генераторы поворотов вокруг осей 1 и 2:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.3)$$

Коммутационные соотношения, определяющие структуру алгебры Ли для группы вращений, имеют вид:

$$[R_1, R_2] = R_3, \quad [R_2, R_3] = R_1, \quad [R_3, R_1] = R_2, \quad (2.2.4)$$

или

$$[R_i, R_j] = e_{ijk} R_k \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (2.2.5)$$

где e_{ijk} — вполне антисимметричный тензор Леви-Чивита⁶. Часто удобно использовать эрмитовы генераторы

$$J_i = iR_i, \quad J_i = J_i^\dagger. \quad (2.2.6)$$

Они удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[J_i, J_j] = ie_{ijk} J_k \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (2.2.7)$$

которые совпадают с коммутационными соотношениями для углового момента в квантовой механике. С помощью генераторов J_i , матрицы, задающие вращение вокруг заданной оси \mathbf{n} ($\mathbf{n}^2 = 1$) на угол ϕ , записываются в

⁶Тензор Леви-Чивита определяется следующим образом. Если числа (ijk) образуют четную перестановку относительно (123) , то соответствующий элемент тензора равен $+1$, если нечетную, то -1 . Если какие-то из чисел набора (ijk) совпадают, то элемент равен нулю.

виде:

$$\mathcal{R}_{\mathbf{n}}(\phi) = \exp[-i(\mathbf{J}\mathbf{n})\phi]. \quad (2.2.8)$$

Здесь формальное скалярное произведение обозначает линейную комбинацию матриц J_i :

$$(\mathbf{J}\mathbf{n}) = J_i n_i.$$

2.3 Неприводимые представления группы вращений

Как было сказано выше, чтобы классифицировать все неприводимые представления алгебры Ли, необходимо найти все операторы Казимира и определить их спектр. Нетрудно убедиться, что для алгебры Ли группы вращений, задаваемой соотношениями (2.2.7), существует единственный оператор Казимира $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$:

$$[J^2, J_i] = 0. \quad (2.3.1)$$

Спектр оператора J^2 можно найти, используя только его эрмитовость и коммутационные соотношения (2.2.7) для операторов J_i . Введем следующие операторы:

$$J_+ = J_1 + iJ_2, \quad J_- = J_1 - iJ_2. \quad (2.3.2)$$

Их называют повышающим и понижающим операторами соответственно. Для них выполняются соотношения

$$J_{\pm}^{\dagger} = J_{\mp}, \quad (2.3.3)$$

$$[J_3, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}, \quad [J_+, J_-] = 2J_3, \quad (2.3.4)$$

$$J_{\mp} J_{\pm} = J^2 - J_3(J_3 \pm 1). \quad (2.3.5)$$

Так как J^2 коммутирует с любым из операторов J_i , в частности с J_3 , то из общих собственных векторов операторов J^2 и J_3 может быть построен полный набор базисных векторов $\psi_{\lambda m}$ пространства представления.

Пусть

$$J^2\psi_{\lambda m} = \lambda\psi_{\lambda m}, \quad J_3\psi_{\lambda m} = m\psi_{\lambda m}, \quad \|\psi_{\lambda m}\| = 1. \quad (2.3.6)$$

Так как J^2, J_3 эрмитовы, то λ, m — действительные числа. Покажем, что спектр J^2 ограничен снизу. Из неравенства

$$\begin{aligned} \lambda\|\psi_{\lambda m}\|^2 &= (\psi_{\lambda m}, J^2\psi_{\lambda m}) = \sum_i (\psi_{\lambda m}, J_i^2\psi_{\lambda m}) = \\ &= \sum_i (J_i\psi_{\lambda m}, J_i\psi_{\lambda m}) = \sum_i \|J_i\psi_{\lambda m}\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

следует, что

$$\lambda \geq 0.$$

Из соотношения (см. (2.3.5))

$$\begin{aligned} (J_{\pm}\psi_{\lambda m}, J_{\pm}\psi_{\lambda m}) &= (\psi_{\lambda m}, J_{\mp}J_{\pm}\psi_{\lambda m}) = \\ &= (\psi_{\lambda m}, [J^2 - J_3(J_3 \pm 1)]\psi_{\lambda m}) = [\lambda - m(m \pm 1)]\|\psi_{\lambda m}\|^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

вытекает

$$\lambda - m(m \pm 1) \geq 0.$$

Решая эту систему неравенств относительно m , получаем

$$\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda} \leq m \leq -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda}.$$

Обозначим

$$j = \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda} - \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\lambda = j(j+1), \quad -j \leq m \leq j. \quad (2.3.8)$$

Так как $\lambda \geq 0$, то и $j \geq 0$. Поскольку соотношение между λ и j взаимно однозначное, то базисные векторы можно характеризовать набором индексов (jm) , то есть $\psi_{\lambda m} \Rightarrow \psi_{jm}$.

Из коммутационных соотношений (2.3.4) для J_{\pm} и J_3 следует, что

$$J_3 J_{\pm} = J_{\pm} (J_3 \pm 1).$$

Поэтому

$$J_3 (J_{\pm} \psi_{jm}) = (m \pm 1) (J_{\pm} \psi_{jm}). \quad (2.3.9)$$

То есть векторы $J_{\pm} \psi_{jm}$ либо являются собственными векторами J_3 с собственными значениями $m \pm 1$, либо равны нулю:

$$\begin{aligned} J_+ \psi_{jm} &= c_{jm}^+ \psi_{j(m+1)}, \\ J_- \psi_{jm} &= c_{jm}^- \psi_{j(m-1)}. \end{aligned}$$

Поскольку вектор равен нулю тогда и только тогда, когда его норма обращается в нуль, то $J_{\pm} \psi_{jm} = 0 \Leftrightarrow c_{jm}^{\pm} = 0$. Коэффициенты c_{jm}^{\pm} определяются из условия нормировки (2.3.7):

$$(c_{jm}^{\pm})^2 = j(j+1) - m(m \pm 1) \equiv (j \mp m)(j \pm m + 1).$$

Таким образом,

$$J_{\pm} \psi_{jm} = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \psi_{j(m \pm 1)}. \quad (2.3.10)$$

Так как $-j \leq m \leq j$, то $c_{jm}^{\pm} = 0$, если только $m = \pm j$ соответственно. Следовательно, $J_{\pm} \psi_{j(\pm j)} = 0$.

Выберем какой-нибудь вектор ψ_{jm} . Будем последовательно действовать на него повышающим оператором J_+ . Так как число собственных векторов оператора J^2 с заданным значением j ограничено ($m \leq j$), то найдется такое целое число n^+ , что $J_+^{(n^++1)}\psi_{jm} = 0$. Причем, как было показано ранее, это возможно только если $m + n^+ = j$. Аналогичные рассуждения справедливы для понижающего оператора. Поэтому

$$\left. \begin{array}{l} \exists n^+ \in \mathbb{Z}, n^+ \geq 0 : m + n^+ = j \\ \exists n^- \in \mathbb{Z}, n^- \geq 0 : m - n^- = -j \end{array} \right\} \Rightarrow 2j = n^+ + n^-.$$

Отсюда следует, что j может принимать только целые или полуцелые значения:

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \quad (2.3.11)$$

Спектр оператора J^2 :

$$j(j+1) = 0, \frac{3}{4}, 2, \frac{15}{4}, 6, \dots \quad (2.3.12)$$

При этом число m будет принимать целые или полуцелые значения соответственно, причем размерность представления (число возможных значений m) равна

$$2j + 1 = 1, 2, 3, 4, 5, \dots \quad (2.3.13)$$

Прямым вычислением можно получить, что для генераторов (2.2.2), (2.2.3) выполняется

$$J^2 = -R^2 = 2I = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, фундаментальному (векторному) представлению группы вращений отвечает значение $j = 1$. Этот факт вполне очевиден, так как

размерность представления равна $2j + 1$, а число компонент вектора равно трем. Также очевидно, что $j = 0$ отвечает скалярному представлению.

Рассмотрим тензорные представления группы вращений. Тензоры второго ранга A_{ij} преобразуются по закону

$$A_{ij} \rightarrow A'_{ij} = \mathcal{R}_{ik} \mathcal{R}_{jl} A_{kl}. \quad (2.3.14)$$

Это представление не является неприводимым. Оно разбивается в прямую сумму неприводимых представлений. Пространства этих неприводимых представлений следующие:

- Пространство симметричных тензоров второго ранга с нулевым следом $j = 2$. Число независимых элементов $2j + 1 = 5$.
- Пространство антисимметричных тензоров второго ранга $j = 1$. Число независимых элементов $2j + 1 = 3$. Компоненты антисимметричных тензоров преобразуются при вращениях так же, как и компоненты векторов. Однако в отличие от обычных (полярных) векторов, при пространственных отражениях они не меняют знак и являются компонентами псевдовекторов (аксиальных векторов).
- Последнее пространство, входящее в разложение, состоит из следов тензоров. Так как следы тензоров являются инвариантами, то они преобразуются по скалярному представлению с $j = 0$.

Глава 3

Основные понятия теории относительности

3.1 Принцип относительности Галилея

Идеологической основой классической механики является принцип относительности Галилея. В соответствии с этим принципом, никакими механическими экспериментами, проведенными в замкнутой системе тел, нельзя отличить одну инерциальную систему отсчета от другой. Следовательно, уравнения классической механики ковариантны не только относительно преобразований из группы вращений, но и относительно преобразования вида:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R} + \mathbf{V}t, \quad t' = t. \quad (3.1.1)$$

Здесь \mathbf{V} — постоянный вектор, имеющий смысл относительной скорости инерциальных систем отсчета.

Преобразования, которые включают в себя как пространственные вращения, так и преобразования (3.1.1), называются преобразованиями Галилея.

3.2 Группа Галилея

Очевидно, эти преобразования образуют группу, которая называется группой Галилея. Чтобы получить явный вид фундаментального матричного представления этой группы, объединим в четырехкомпонентный объект пространственные координаты и время¹. Этот объект можно записать в виде столбца

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (3.2.1)$$

При преобразованиях из группы вращений набор пространственных координат ведет себя как вектор, а время — как скаляр. Матрицы, действующие на этот объект и задающие преобразования Галилея, имеют вид²

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_x & & & \\ \beta_y & \mathcal{R} & & \\ \beta_z & & & \end{pmatrix}. \quad (3.2.2)$$

Здесь \mathcal{R} — ортогональная матрица 3×3 , определяющая вращения, а $\beta_i = \frac{V_i}{c}$. Ясно, что группа Галилея оставляет инвариантной форму

$$(\mathbf{R} - \mathbf{V}t)^2 = \text{inv}. \quad (3.2.3)$$

¹Чтобы размерность всех компонент этого объекта была одна и та же, домножим время на константу, имеющую размерность скорости. Для определенности будем считать, что эта константа — скорость света в вакууме, которой приписано точное значение, по определению равное $c = 299792458 \text{ м сек}^{-1}$.

²Следует обратить внимание на то, что представления группы Галилея обладают некоторыми свойствами, неприятными для физических приложений. Особенно это касается приложений в области квантовых теорий. См. V. Bargmann, *Ann. of Math.* **59**, 1 (1954).

3.3 Принцип относительности Эйнштейна

Постулат Галилея хотелось бы распространить и на электромагнитные явления³. Однако преобразования Галилея подразумевают, что скорость распространения электромагнитного взаимодействия (скорость света) должна зависеть от скорости источника. Ряд экспериментов, выполненных в конце XIX века, в особенности знаменитый опыт Майкельсона–Морли, с хорошей точностью показали, что способ сложения скоростей, принятый в классической механике, для световых сигналов не выполняется. То есть гипотеза о независимости скорости света от скорости источника не противоречит экспериментальным данным.

Данный парадокс был объяснен А. Эйнштейном. В соответствии с принципом относительности Эйнштейна, *никакими* экспериментами, проведенными в замкнутой системе тел, нельзя отличить одну инерциальную систему отсчета от другой⁴. В частности, этот принцип подразумевает независимость скорости света от скорости источника. Ясно, что это может иметь место, только если время в различных инерциальных системах отсчета течет по-разному.

Преобразования, связывающие координаты и время в различных системах отсчета, которые по традиции называются преобразованиями Лоренца (название предложил А. Пуанкаре), мы получим в следующем разделе.

³Среди множества монографий и учебников, посвященных классической электродинамике, можно выделить книги: Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, М., Наука (2004); Дж. Джексон, *Классическая электродинамика*, М., Мир (1965). Многочисленные примеры и упражнения содержатся в книге: В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин, *Сборник задач по электродинамике*, М., НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» (2002).

⁴Перевод на русский язык работы А. Эйнштейна 1905 г., а также статей Г. А. Лоренца 1904 г. и А. Пуанкаре 1905 г. см. в сборнике: *Принцип относительности*, М., ОНТИ (1935). Краткое изложение истории вопроса можно найти в книге: В. Паули, *Теория относительности*, М., Наука (1991).

Здесь же имеет смысл отметить, что вопрос о том, что есть измерение времени, А. Пуанкаре поставил ранее в одноименной работе⁵.

В настоящее время выводы специальной теории относительности подтверждены всей совокупностью имеющихся экспериментальных данных. Более того, в прямых экспериментах был многократно проверен и постулат о постоянстве скорости света. В частности, исключительно точные эксперименты, проведенные с использованием квантовых генераторов, показали независимость скорости света от скорости источника⁶.

3.4 Преобразования Лоренца

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета \mathcal{K} и \mathcal{K}' . Будем считать, что оси координатных систем, связанных с ними, параллельны. Предположим, что система \mathcal{K}' движется относительно \mathcal{K} со скоростью V вдоль общего направления осей x и x' (см. Рис.3.1).

⁵Н. Poincaré, *Revue de Métaphysique et de Morale*, VI, 1, (1898). Перевод на русский язык: А. Пуанкаре, *Измерение времени*. В книге: *Избранные труды* в 3 томах, том 3, М., Наука (1973).

⁶Необходимо отметить, что в двадцатых годах XX века, один из наиболее уважаемых экспериментаторов того времени Д. К. Миллер, на установке, аналогичной установке Майкельсона, но существенно улучшенной, получил статистически значимый результат, свидетельствующий о наличии так называемого «эфирного ветра». К счастью, к тому времени теория относительности получила не только широкое признание, но и была неплохо проверена экспериментально. Хотя результаты Миллера наделали много шума, они не оказали влияния на пути развития науки. До сих пор не ясно, что послужило причиной этих результатов; они остаются одной из загадок в истории физики. Крайне интересны оригинальные статьи экспериментаторов, которые ставили опыты по прямой проверке принципа относительности Эйнштейна. Они опубликованы в русском переводе в сборнике *Эфирный ветер*, М., Энергоатомиздат (2011). Однако необходимо учесть, что указанный сборник составлен сторонником теории мирового эфира, поэтому комментарии, которые в нем наличествуют, вызывают определенный скептицизм. Еще раз подчеркнем, что справедливость первых принципов физической теории подтверждается *всей совокупностью* экспериментальных данных. Поэтому к отдельным результатам, которые выпадают из общего ряда, необходимо относиться крайне осторожно. Так, несколько лет назад коллаборация OPERA заявила об обнаружении сверхсветовой скорости у нейтрино. Как вскоре выяснилось, причиной сенсации стал плохо закрученный разъем.

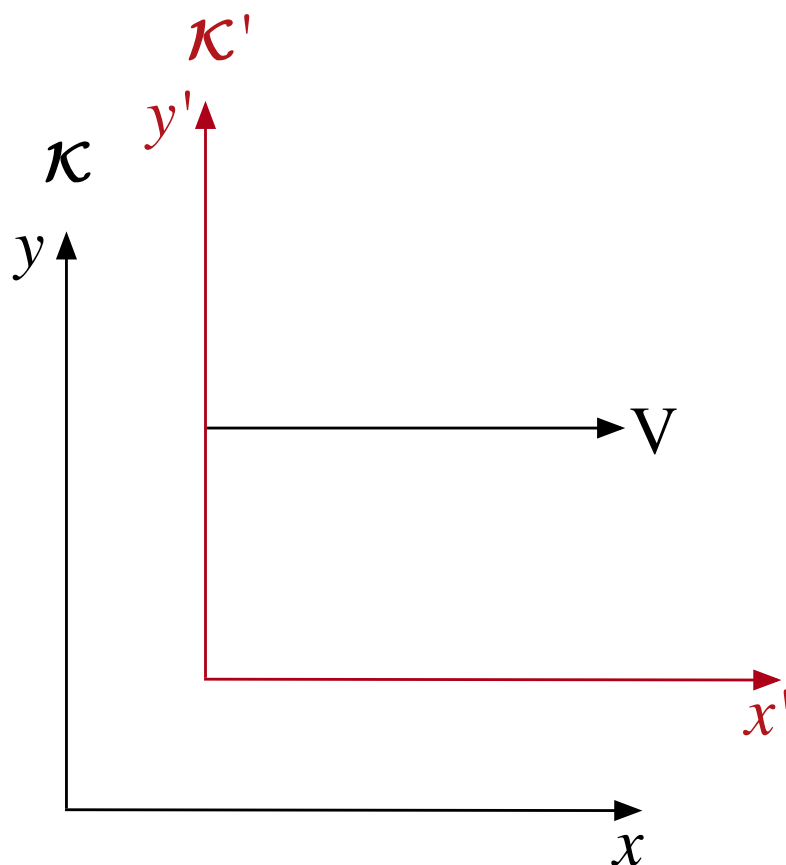


Рис. 3.1:

Пусть координаты какого-то события относительно системы \mathcal{K} есть $\{x, y, z, t\}$, а относительно системы \mathcal{K}' есть $\{x', y', z', t'\}$. Найдем преобразование, связывающее наборы $\{x, y, z, t\}$ и $\{x', y', z', t'\}$, считая, что скорость света c в обеих системах отсчета одна и та же. Так как пространство и время предполагаются однородными, то преобразование должно быть линейным.

В силу изотропности пространства изменение ориентации осей координатных систем не может изменять тип преобразования, поэтому мы можем рассматривать частный случай их взаимной ориентации, указанный выше. Очевидно, что в этом случае плоскости $y = 0$ и $z = 0$ совпадают с плоско-

стями $y' = 0$ и $z' = 0$ соответственно. Это возможно, только если $y' = \alpha y$ и $z' = \alpha' z$. Поскольку системы \mathcal{K} и \mathcal{K}' равноправны, то одновременно должно выполняться $y = \alpha y'$ и $z = \alpha' z'$. Следовательно, $\alpha^2 = 1$, $\alpha'^2 = 1$, то есть $\alpha, \alpha' = \pm 1$. Выбор знака « $-$ » в этом равенстве соответствует отражению направления осей. Поэтому, без нарушения общности, можно считать $\alpha, \alpha' = 1$. То есть

$$y' = y, \quad z' = z. \quad (3.4.1)$$

Таким образом, нетривиальная зависимость будет только между парами $\{x, t\}$ и $\{x', t'\}$:

$$x' = a_1 x + b_1 t, \quad t' = a_2 x + b_2 t. \quad (3.4.2)$$

Начало координат системы отсчета \mathcal{K}' в системе \mathcal{K}' имеет координату $x' = 0$ и координату $x = Vt$ в системе \mathcal{K} . Отсюда следует, что

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad x = \gamma(x' + Vt'), \quad (3.4.3)$$

поскольку системы отсчета \mathcal{K} и \mathcal{K}' равноправны.

Для определения параметра γ воспользуемся постулатом равенства скорости света c в обеих системах отсчета. Пусть в момент времени $t = t' = 0$, в который начала координат систем отсчета \mathcal{K} и \mathcal{K}' совпадают, в направлении оси x дан световой сигнал:

$$x' = ct', \quad x = ct. \quad (3.4.4)$$

Тогда (см. (3.4.3), (3.4.4))

$$x' = ct' = \gamma(x - Vt), \quad x = ct = \gamma(x' + Vt'). \quad (3.4.5)$$

Перемножая выражения для x, x' в (3.4.5) и используя (3.4.4), получаем соотношение

$$c^2 t t' = \gamma^2 (c^2 - V^2) t t', \quad (3.4.6)$$

из которого следует, что

$$\gamma^2 = (1 - \beta^2)^{-1}, \quad \beta = \frac{V}{c}. \quad (3.4.7)$$

Поскольку $\gamma > 0$ (так как $x' = \gamma x$, если $V = 0$), то

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3.4.8)$$

Следовательно,

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3.4.9)$$

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3.4.10)$$

Подставим (3.4.9) в (3.4.10). Тогда $x = \gamma[\gamma(x - Vt) + Vt']$. Следовательно,

$$t' = \frac{t - x\beta/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3.4.11)$$

$$t = \frac{t' + x'\beta/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3.4.12)$$

Соотношения (3.4.1), (3.4.9) – (3.4.12) и есть те формулы, которые задают преобразование координат пространства событий из одной инерциальной системы отсчета в другую. Эти формулы называются преобразованиями Лоренца.

3.5 Сложение скоростей

Очевидно, что преобразования Лоренца справедливы и в дифференциальной форме. То есть

$$dx' = \frac{dx - V dt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3.5.1)$$

$$dy' = dy, \quad (3.5.2)$$

$$dz' = dz, \quad (3.5.3)$$

$$dt' = \frac{dt - dx\beta/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3.5.4)$$

По определению, декартовы компоненты скоростей в системе отсчета \mathcal{K} равны

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}, \quad (3.5.5)$$

а в системе отсчета \mathcal{K}' равны

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'}. \quad (3.5.6)$$

Используя (3.5.1) – (3.5.4), имеем

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x\beta/c}, \quad v'_y = \frac{v_y\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - v_x\beta/c}, \quad v'_z = \frac{v_z\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - v_x\beta/c}. \quad (3.5.7)$$

Обращает на себя внимание тот факт, что изменяются компоненты скорости, перпендикулярные относительной скорости систем отсчета. Это связано с изменением темпа времени.

Нетрудно обобщить формулы (3.5.7) на случай, когда относительная скорость систем отсчета \mathbf{V} не параллельна оси x , а направлена произвольным образом. Введем компоненты скоростей объекта параллельные $\mathbf{v}_{\parallel}, \mathbf{v}'_{\parallel}$, и перпендикулярные $\mathbf{v}_{\perp}, \mathbf{v}'_{\perp}$, скорости \mathbf{V} , которые определяются формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\parallel} &= \frac{(\mathbf{v}\mathbf{V})}{|\mathbf{V}|^2}\mathbf{V}, & \mathbf{v}_{\perp} &= \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{v}\mathbf{V})}{|\mathbf{V}|^2}\mathbf{V}, \\ \mathbf{v}'_{\parallel} &= \frac{(\mathbf{v}'\mathbf{V})}{|\mathbf{V}|^2}\mathbf{V}, & \mathbf{v}'_{\perp} &= \mathbf{v}' - \mathbf{v}'_{\parallel} = \mathbf{v}' - \frac{(\mathbf{v}'\mathbf{V})}{|\mathbf{V}|^2}\mathbf{V}. \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_{\parallel} &= \frac{\mathbf{v}_{\parallel} - \mathbf{V}}{1 - (\mathbf{v}_{\parallel} \mathbf{V})/c^2} = \frac{v_{\parallel} - V}{1 - (vV)/c^2}, \\ \mathbf{v}'_{\perp} &= \frac{\mathbf{v}_{\perp} \sqrt{1 - |\mathbf{V}|^2/c^2}}{1 - (\mathbf{v}_{\parallel} \mathbf{V})/c^2} = \frac{\mathbf{v}_{\perp} \sqrt{1 - |\mathbf{V}|^2/c^2}}{1 - (vV)/c^2}. \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

Поэтому

$$\mathbf{v}' = \frac{1}{1 - (\mathbf{v} \mathbf{V})/c^2} \left\{ \left(\frac{(\mathbf{v} \mathbf{V})}{|\mathbf{V}|^2} - 1 \right) \mathbf{V} - \left(\frac{(\mathbf{v} \mathbf{V})}{|\mathbf{V}|^2} \mathbf{V} - \mathbf{v} \right) \sqrt{1 - |\mathbf{V}|^2/c^2} \right\}. \quad (3.5.10)$$

Отсюда видно, что сложение скоростей происходит несимметричным образом⁷. Действительно, если в (3.5.10) произвести замену $\mathbf{V} \Leftrightarrow \mathbf{v}$, то направление вектора \mathbf{v}' не изменится на обратное, как это было бы в ньютоновской механике. Однако абсолютная его величина

$$|\mathbf{v}'| = c \sqrt{1 - \frac{(1 - |\mathbf{V}|^2/c^2)(1 - |\mathbf{v}|^2/c^2)}{(1 - (\mathbf{v} \mathbf{V})/c^2)^2}} = \sqrt{\frac{(\mathbf{v} - \mathbf{V})^2 - [\mathbf{v} \times \mathbf{V}]^2/c^2}{(1 - (\mathbf{v} \mathbf{V})/c^2)^2}} \quad (3.5.11)$$

будет той же самой. Это является одним из проявлений весьма интересного эффекта — прецессии Томаса, который будет рассмотрен позже.

Эффект несимметричности сложения скоростей наиболее нагляден, если скорости \mathbf{v} и \mathbf{V} ортогональны: $(\mathbf{v} \mathbf{V}) = 0$ (см. Рис.3.2). Тогда в системе отсчета, движущейся со скоростью \mathbf{V} относительно исходной,

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} \sqrt{1 - |\mathbf{V}|^2/c^2} - \mathbf{V}, \quad (3.5.12)$$

а в системе отсчета, движущейся со скоростью \mathbf{v} относительно исходной,

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} \sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2/c^2} - \mathbf{v}. \quad (3.5.13)$$

⁷Детальное рассмотрение этого вопроса и ссылки на основополагающие работы даны в статье: В. И. Ригус, *УФН*, **178**, № 7, 739 (2008).

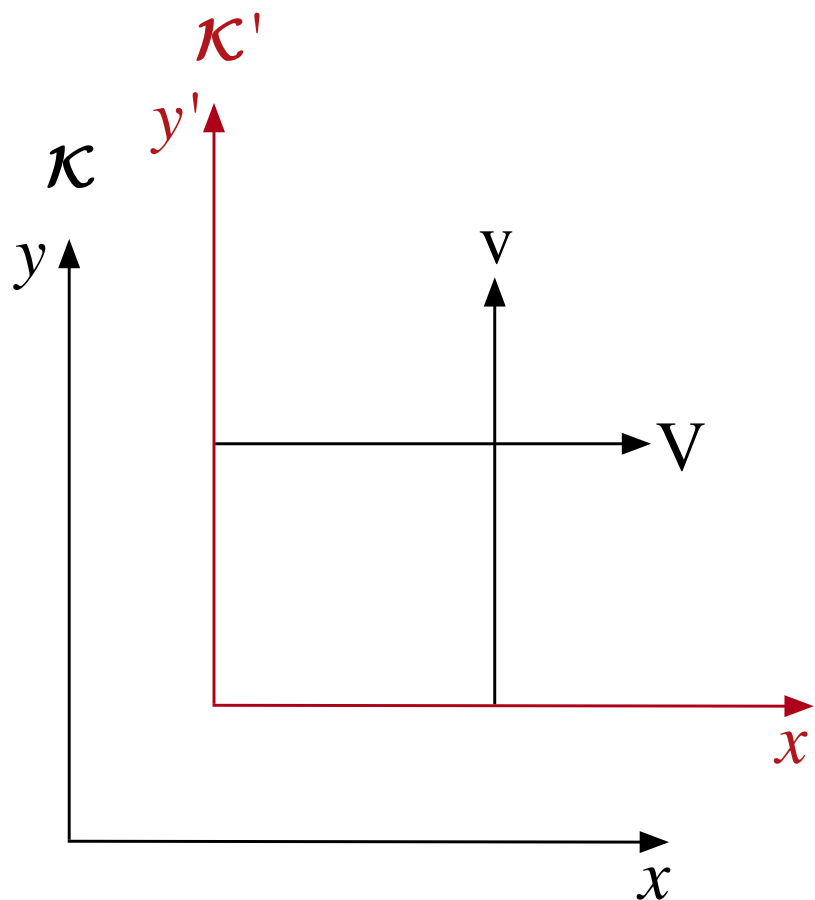


Рис. 3.2:

3.6 Собственное время

Рассмотрим объект, находящийся в начале координатной системы K' .
Так как (см. (3.5.4))

$$dt = \frac{dt' + dx'\beta/c}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

и $dx' = 0$, то

$$dt' = dt\sqrt{1 - \beta^2}. \quad (3.6.1)$$

Следовательно, время в системе отсчета, в которой объект покоится, течет медленнее, чем в любой другой, например, в лабораторной системе отсчета, относительно которой неподвижен наблюдатель. По традиции, для времени в системе отсчета, в которой объект неподвижен, вводится специальное обозначение

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \beta^2}, \quad (3.6.2)$$

а

$$\tau = \int dt\sqrt{1 - \beta^2} \quad (3.6.3)$$

называется собственным временем объекта. Крайне важно то, что собственное время является инвариантной величиной — оно не зависит от выбора системы отсчета, поскольку система отсчета, в которой объект покоится, является единственной. Так как

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

то лабораторное время определяется формулой

$$t = \int \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3.6.4)$$

Эффект замедления времени у движущегося объекта является наблюдаемым. В частности, время жизни движущейся нестабильной частицы больше, чем у аналогичной частицы, находящейся в покое. По-видимому, впервые это было экспериментально обнаружено при исследовании распадов π -мезонов⁸.

⁸R.P. Durbin, H.H. Loar, and W.W. Havens, Jr., *Phys. Rev.* **88**, 179 (1952).

3.7 Лоренцево сокращение

Еще одним интересным следствием преобразований Лоренца является сокращение линейных размеров движущихся объектов в лабораторной системе отсчета. Этот эффект называется сокращением Лоренца–Фицджеральда, или просто лоренцевым сокращением. Для макроскопических объектов он экспериментально не наблюдался, хотя и служит излюбленным поводом для обсуждения так называемых парадоксов теории относительности.

Рассмотрим протяженный объект, ориентированный вдоль оси x , неподвижный в системе отсчета \mathcal{K}' , которая движется со скоростью V относительно системы отсчета \mathcal{K} вдоль общего направления их осей x . Из (3.4.9) следует, что координаты концов объекта в системе \mathcal{K}' определяются формулами

$$x'_1 = \frac{x_1 - Vt_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - Vt_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3.7.1)$$

Вычитая одно равенство в (3.7.1) из другого, получаем

$$l' = \frac{l - V\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3.7.2)$$

Здесь l, l' — длины объекта в системах \mathcal{K} и \mathcal{K}' соответственно, а Δt — интервал времени в системе отсчета \mathcal{K} между измерениями координат концов объекта. Если $\Delta t = 0$, то есть координаты концов измеряются одновременно, то имеет место соотношение

$$l = l' \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (3.7.3)$$

Следовательно, при движении объект сжимается в направлении своей скорости. Он имеет максимальную длину в системе отсчета, относительно которой он неподвижен.

Однако в силу равноправия систем отсчета \mathcal{K} и \mathcal{K}' можно записать

$$l = \frac{l' + V\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3.7.4)$$

Тогда при $\Delta t' = 0$ получается обратное соотношение

$$l' = l\sqrt{1 - \beta^2}. \quad (3.7.5)$$

Кажущееся противоречие легко объяснимо. Лоренцево сокращение имеет место в той системе отсчета, в которой производится измерение, то есть одновременная фиксация координат концевых точек объекта.

3.8 Абберация света

Рассмотрим движение частицы в плоскости x, y относительно систем отсчета \mathcal{K} и \mathcal{K}' (см. Рис.3.3).

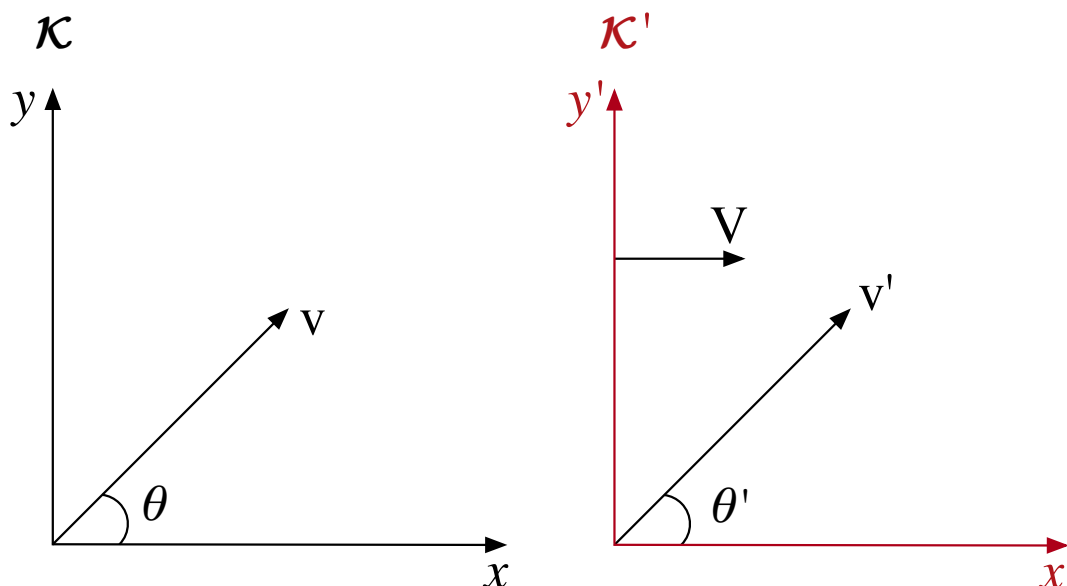


Рис. 3.3:

Обозначим через θ, θ' углы между скоростью точки и осью x в указанных системах отсчета. Тогда

$$\begin{aligned} v_x &= v \cos \theta, & v'_x &= v' \cos \theta', \\ v_y &= v \sin \theta, & v'_y &= v' \sin \theta', \end{aligned} \quad (3.8.1)$$

где v, v' — абсолютные величины скоростей. Поскольку

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x \beta / c}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + v'_x \beta / c}, \quad (3.8.2)$$

то

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{v'_x + V} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \theta'}{V/v' + \cos \theta'}. \quad (3.8.3)$$

Соотношение (3.8.3) связывает направления скоростей точек в различных системах отсчета. Особенно просто это соотношение выглядит, когда рассматривается распространение световых лучей, и $v, v' = c$. Тогда

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \theta'}{\beta + \cos \theta'}, \quad \theta, \theta' \in [0, \pi], \quad (3.8.4)$$

откуда следует, что

$$\sin \theta = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \theta'}{1 + \beta \cos \theta'}, \quad (3.8.5)$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} = \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'}. \quad (3.8.6)$$

Формулы (3.8.4), (3.8.5), (3.8.6) описывают явление аберрации света. Наиболее показательна формула (3.8.6), в которую входят только косинусы углов.

Рассмотрим объект, связанный с системой \mathcal{K}' . Естественно

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}. \quad (3.8.7)$$

При ультрарелятивистских скоростях объекта, когда параметр β близок к единице, практически для любых значений угла θ , кроме $\cos \theta > \beta$, значения $\cos \theta' \approx -1$. Все источники, даже из задней полусферы, светят навстречу движущемуся объекту. Если же $\cos \theta = 1$, то для любых значений β имеем $\cos \theta' = 1$, то есть направление светового луча не изменяется.

3.9 Инвариантность интервала

Преобразования Лоренца сохраняют квадратичную форму

$$S^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (3.9.1)$$

Действительно,

$$(ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \frac{(ct - \beta x)^2 - (x - Vt)^2}{1 - \beta^2} - y^2 - z^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (3.9.2)$$

Рассмотрим два события с координатами

$$\{ct_1, x_1, y_1, z_1\} \text{ и } \{ct_2, x_2, y_2, z_2\}. \quad (3.9.3)$$

Очевидно, что форма

$$S^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 = \text{inv}. \quad (3.9.4)$$

Поэтому, в зависимости от знака формы S^2 , считается, что указанные события разделены интервалами различного типа. Если $S^2 > 0$, то интервал называется *временноподобным*. Если $S^2 < 0$, то интервал называется *пространственноподобным*. Если же $S^2 = 0$, то интервал называется *светоподобным*. Эту ситуацию можно представить графически, введя понятие светового конуса, поверхность которого определяется уравнением $S^2 = 0$ (см. Рис.3.4).

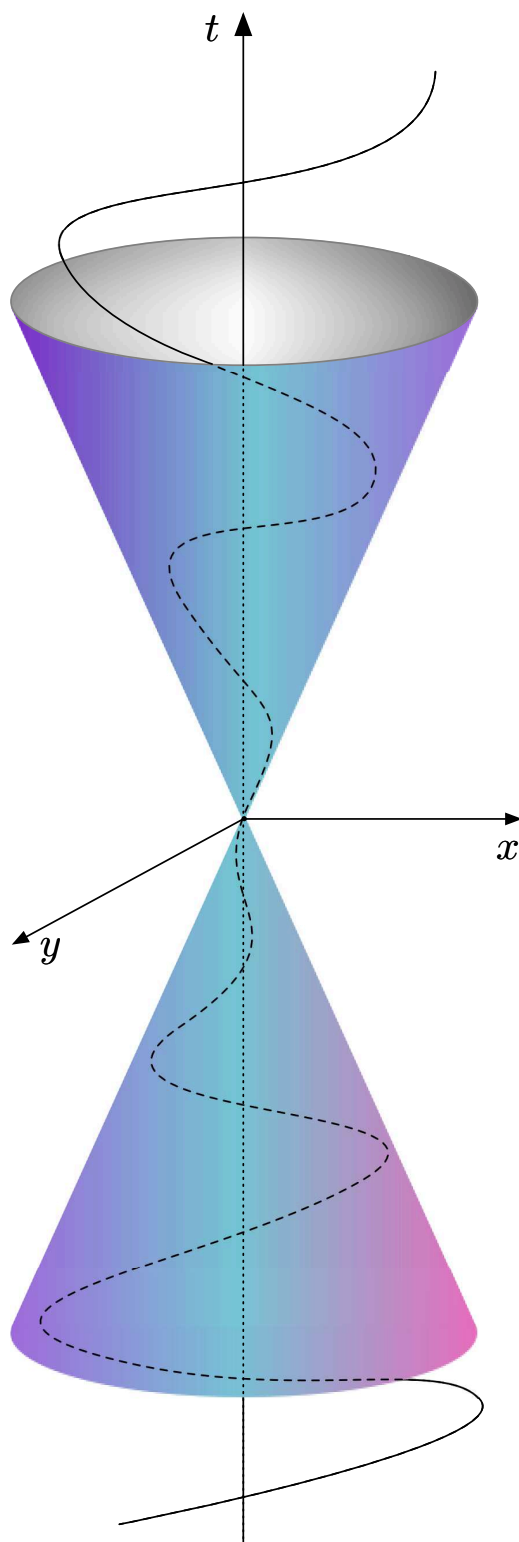


Рис. 3.4:

Запишем выражение (3.9.4) в дифференциальной форме:

$$(dS)^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2. \quad (3.9.5)$$

Если $(dS)^2 > 0$, то

$$dS = c dt \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (3.9.6)$$

что только коэффициентом c отличается от выражения для дифференциала собственного времени $d\tau$.

Это вполне понятно. Только события, разделенные времениподобным интервалом, то есть лежащие внутри светового конуса, могут иметь причинно-следственную связь. В таком случае всегда можно выбрать такую систему отсчета \mathcal{K}' , в которой оба события происходят в одной пространственной точке, но в разное время. Если $t'_2 - t'_1 > 0$ (временная координата события 2 лежит в будущем), то событие 2 может быть следствием события 1. Если же $t'_2 - t'_1 < 0$ (временная координата события 2 лежит в прошлом), то событие 2 может быть причиной события 1. В частности, если рассматривать движение частицы, то ее мировая линия, то есть траектория в четырехмерном пространственно-временном многообразии, всегда лежит внутри светового конуса. Мировая линия параметризована собственным временем частицы (или интервалом, что, собственно, одно и то же).

Мировая линия не может выйти за пределы светового конуса, так как события вне конуса являются абсолютно удаленными. То есть они не могут быть связаны сигналом, распространяющимся со скоростью меньшей или равной скорости света. Это следует из того, что всегда можно выбрать такую систему отсчета \mathcal{K}'' , что $t''_2 - t''_1 = 0$, то есть в системе отсчета \mathcal{K}'' события происходят одновременно. Из этого следует, что в разных системах отсчета они могут происходить в различных последовательностях.

Действительно, пусть $t_2'' = t_1'' = 0$. Тогда

$$t_2 = \frac{\beta x_2''}{c\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t_1 = \frac{\beta x_1''}{c\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (3.9.7)$$

Предположим, что $x_2'' > x_1''$. Тогда если $\beta > 0$, то $t_2 > t_1$, а если $\beta < 0$, то $t_2 < t_1$. Таким образом, между этими событиями не может быть причинно-следственной связи.

3.10 Сверхсветовые скорости

Обратим внимание на то, что из формул, определяющих закон сложения скоростей, вообще говоря, не следует, что скорость света есть максимально возможная скорость. Из них следует, что если в какой-то инерциальной системе отсчета скорость объекта меньше скорости света c , то и в любой другой инерциальной системе отсчета, которая движется относительно исходной со скоростью меньшей c , скорость данного объекта меньше, чем скорость света.

Однако возможна и другая ситуация. Из соотношения (3.5.11) следует, что

$$(1 - |\mathbf{v}'|^2/c^2) (1 - (\mathbf{v}\mathbf{V})/c^2)^2 = (1 - |\mathbf{V}|^2/c^2) (1 - |\mathbf{v}|^2/c^2). \quad (3.10.1)$$

То есть если в какой-то инерциальной системе отсчета скорость объекта больше скорости света c , то и в любой другой инерциальной системе отсчета, которая движется относительно исходной со скоростью меньшей c , скорость данного объекта больше, чем скорость света.

Объекты с таким свойством называются тахионами⁹. Экспериментально они не обнаружены, но и нет прямого запрета на их существование.

⁹См., например, Я. П. Терлецкий, Ю. П. Рыбаков, *Электродинамика*, М., Высшая школа (1990); В. А. Угаров, *Специальная теория относительности*, М., Наука (1977).

Если вопрос с тахионами может быть разрешен только экспериментально, то прочие парадоксы, связанные со «сверхсветовыми скоростями», находят чисто логическое объяснение. Классический пример — вращение жесткого диска большого радиуса R с большой угловой скоростью ω . Если использовать связь угловой и линейной скоростей точек данного диска ньютоновской механики $v = \omega R$, то вполне можно получить $v > c$. Однако этот пример некорректен, так как в релятивистской механике не существует понятия абсолютно твердого тела. Действительно, макроскопические тела сохраняют форму за счет электромагнитного взаимодействия, которое не может распространяться со скоростями большими, чем c . Поэтому рассматриваемый диск будет с неизбежностью деформироваться таким образом, что линейные скорости его точек будут меньшими, чем скорость света.

Примеры другого рода связаны с событиями, разделенными пространственноподобными интервалами. Так, скорость сближения двух объектов, движущихся с близкими к c скоростями относительно некоторой системы отсчета навстречу друг другу, вполне может превышать c (но не $2c$) относительно данной системы отсчета. Аналогично, скорость перемещения по экрану луча света, отраженного от вращающегося зеркала, может превосходить c .

После того, как нами были рассмотрены простейшие следствия применения принципа относительности Эйнштейна, можно, наконец, кратко сформулировать основной вывод теории относительности. *Реально происходит то, что мы наблюдаем в эксперименте.*

3.11 Центр масс

В релятивистской динамике центр масс вращающейся системы изменяет свое положение в зависимости от выбора системы отсчета¹⁰. При этом центр масс находится внутри диска, перпендикулярного вектору углового момента системы \mathbf{M} и имеющего радиус

$$\varrho = |\mathbf{M}|/mc. \quad (3.11.1)$$

Необходимо подчеркнуть, что это чисто классический эффект. Например, для Земли $\varrho \approx 10$ м.

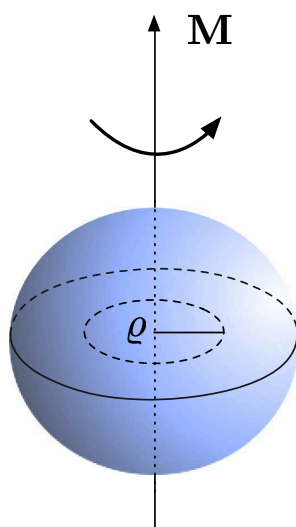


Рис. 3.5:

¹⁰К. Меллер, *Теория относительности*, М., Атомиздат (1975).

Глава 4

Группа Лоренца

4.1 Пространство Минковского

Введем четырехкомпонентные объекты, характеризующие точки пространства событий. Их компоненты перечисляются следующим образом:

$$x^\mu = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{ct, \mathbf{x}\}. \quad (4.1.1)$$

При переходе от одной системы отсчета к другой они преобразуются в соответствии с преобразованиями Лоренца (3.4.9), (3.4.10), (3.4.11), (3.4.12). Эти четырехкомпонентные объекты образуют так называемое пространство Минковского.

Назовем четырехмерным вектором (4-вектором) объект

$$p^\mu = \{p^0, p^1, p^2, p^3\} = \{p^0, \mathbf{p}\}, \quad (4.1.2)$$

компоненты которого при переходе от одной системы отсчета к другой преобразуются в соответствии с (3.4.9), (3.4.10), (3.4.11), (3.4.12), то есть как координаты пространства событий. Скалярное произведение в таком пространстве задается формулой (b^μ — 4-вектор):

$$(p, b) = p^0 b^0 - (\mathbf{p}\mathbf{b}). \quad (4.1.3)$$

Оно инвариантно относительно преобразований Лоренца и явно индефинитно.

Кроме контравариантных компонент 4-векторов удобно ввести и ковариантные компоненты. Так как пространство Минковского плоское, то метрический тензор, с помощью которого осуществляется переход к ковариантным компонентам, диагонален и имеет вид

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (4.1.4)$$

Поэтому ковариантные компоненты 4-вектора определяются следующим образом:

$$p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu = \{p^0, -p^1, -p^2, -p^3\} = \{p^0, -\mathbf{p}\}. \quad (4.1.5)$$

Таким образом, скалярное произведение (4.1.3) можно представить как

$$(pb) = p^\mu b_\mu = p_\mu b^\mu \quad (4.1.6)$$

(по повторяющимся индексам подразумевается суммирование).

Наиболее очевидным примером 4-вектора является релятивистское обобщение понятия скорости, так называемая 4-скорость. Она определяется формулой

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{cd\tau} = \{u^0, \mathbf{u}\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right\}. \quad (4.1.7)$$

Очевидно, что 4-скорость представляет собой 4-вектор, так как собственное время это 4-скаляр. Действительно, как уже указывалось, собственное время является инвариантной величиной — оно не зависит от выбора системы отсчета, поскольку система отсчета, в которой объект покоится, является единственной. Прямым вычислением можно убедиться, что

$$u^\mu u_\mu = (u, u) = 1. \quad (4.1.8)$$

Аналогичным образом можно ввести 4-ускорение

$$w^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \{w^0, \mathbf{w}\}. \quad (4.1.9)$$

Дифференцируя соотношение (4.1.8) по собственному времени, имеем

$$w^\mu u_\mu = 0, \quad (4.1.10)$$

то есть в смысле скалярного произведения в пространстве Минковского 4-скорость и 4-ускорение ортогональны. Из (4.1.10) следует, что 4-ускорение w^μ является пространственноподобным вектором, то есть его квадрат $w^\mu w_\mu < 0$.

Действительно, если перейти в систему отсчета, в которой объект неподвижен, то его 4-скорость $u^\mu = \{1, \mathbf{0}\}$. Поэтому, чтобы выполнялось (4.1.10), необходимо, чтобы в этой системе отсчета $w^\mu = \{0, \mathbf{w}\}$. Из этого простого соображения следует, что два времениподобных 4-вектора не могут быть ортогональны друг другу в четырехмерном смысле.

Найдем явный вид 4-ускорения. Обозначим

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (4.1.11)$$

Здесь $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ — ускорение частицы, измеренное в лабораторной системе отсчета. Поскольку

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} \equiv \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \frac{d(\beta^2)}{d\tau} = \frac{2(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha})}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (4.1.12)$$

то

$$w^\mu = \frac{1}{1-\beta^2} \left\{ \frac{(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha})}{1-\beta^2}, \boldsymbol{\alpha} + \frac{\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha})}{1-\beta^2} \right\}. \quad (4.1.13)$$

Очевидно, что

$$w^\mu w_\mu = \frac{[\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}]^2 - \boldsymbol{\alpha}^2}{(1-\beta^2)^3} = - \left\{ \frac{(\dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{(1-\beta^2)} + \frac{(\boldsymbol{\beta}\dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{(1-\beta^2)^2} \right\} < 0. \quad (4.1.14)$$

4.2 Определение группы Лоренца

Рассмотрим преобразования, задаваемые вещественными матрицами L , которые сохраняют индефинитное скалярное произведение в пространстве Минковского:

$$(xy) \equiv x^\mu y_\mu = x^0 y^0 - (\mathbf{x}\mathbf{y}) = \underline{x}^T \underline{g} \underline{y}. \quad (4.2.1)$$

Здесь $\underline{x}^T = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ — матрица-строка, \underline{x} — соответствующая матрица-столбец, а матричная реализация метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ имеет вид

$$g_{\alpha\beta} \equiv (e_\alpha \otimes e_\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.2.2)$$

где e_α^μ — стандартный базис пространства Минковского (см. (A.2.1)).

Из инвариантности скалярного произведения (4.2.1) следует, что

$$(x'y') = \underline{x}'^T \underline{g} \underline{y}' = (L\underline{x})^T \underline{g} (L\underline{y}) = \underline{x}^T L^T \underline{g} L \underline{y} = \underline{x}^T \underline{g} \underline{y} = (xy),$$

то есть для рассматриваемых преобразований

$$L^T \underline{g} L = \underline{g}. \quad (4.2.3)$$

Очевидно, что преобразования, удовлетворяющие условию (4.2.3), образуют группу. Так как определитель произведения матриц равен произведению их определителей, а $\text{Det } L^T = \text{Det } L$, то из (4.2.3) следует, что

$$\text{Det } L = \pm 1. \quad (4.2.4)$$

Запишем (4.2.3), явно выписав индексы. Имеем

$$(L^T)_\mu^\alpha g_{\alpha\beta} L^\beta_\nu = L^\alpha_\mu g_{\alpha\beta} L^\beta_\nu = g_{\mu\nu}.$$

Положив $\mu = \nu = 0$, получаем

$$(L^0_0)^2 - \sum_{j=1}^3 (L^j_0)^2 = 1.$$

Следовательно,

$$(L^0_0)^2 \geq 1. \quad (4.2.5)$$

Таким образом, групповое многообразие состоит из четырех несвязных частей. Часть, для которой $\text{Det } L = 1$ и $L^0_0 \geq 1$, обозначается L^{\uparrow}_+ и называется собственной (знак «+») ортохронной (стрелка вверх «↑») группой Лоренца. Эта группа не включает в себя отражения пространственных осей и отражение времени. Остальные части группового многообразия группами не являются, так как не содержат единичный элемент. Однако объединяя их с L^{\uparrow}_+ , можно включить в рассмотрение и операции отражения. Так, ортохронная группа Лоренца $L^{\uparrow} = L^{\uparrow}_+ \cup L^{\uparrow}_-$ содержит пространственные отражения. Группа $L^{\uparrow}_+ \cup L^{\downarrow}_-$ содержит операцию обращения времени, а $L^{\uparrow}_+ \cup L^{\downarrow}_+$ — полное отражение¹.

Представим эту конструкцию в виде диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} L^{\uparrow}_+ & L^{\downarrow}_+ & \rightarrow PT \\ L^{\uparrow}_- & L^{\downarrow}_- & \\ \downarrow & \searrow & \\ P & & T \end{array}$$

Группа L^{\uparrow}_+ , кроме вращений трехмерного евклидова пространства, содержит преобразования, отвечающие переходам из одной инерциальной системы отсчета в другую, то есть собственно преобразования Лоренца, которые часто называют бустами. Например, матрица преобразования при

¹В квантовой теории согласно СРТ-теореме эта операция эквивалентна обращению знака заряда системы.

переходе в систему отсчета \mathcal{K} из движущейся относительно нее со скоростью $\beta = (\beta, 0, 0)$ системы \mathcal{K}' имеет вид

$$L_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2.6)$$

Однако, как нетрудно убедиться, параметр β не является каноническим. Действительно,

$$L_1(\beta_1)L_1(\beta_2) = \begin{pmatrix} \frac{1+\beta_1\beta_2}{\sqrt{1-\beta_1^2}\sqrt{1-\beta_2^2}} & \frac{\beta_1+\beta_2}{\sqrt{1-\beta_1^2}\sqrt{1-\beta_2^2}} & 0 & 0 \\ \frac{\beta_1+\beta_2}{\sqrt{1-\beta_1^2}\sqrt{1-\beta_2^2}} & \frac{1+\beta_1\beta_2}{\sqrt{1-\beta_1^2}\sqrt{1-\beta_2^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq L_1(\beta_1 + \beta_2).$$

Параметр же ψ , такой, что $\text{th } \psi = \beta$, каноническим является, и матрицу преобразования можно переписать следующим образом:

$$L_1(\psi) = \begin{pmatrix} \text{ch}(\psi) & \text{sh}(\psi) & 0 & 0 \\ \text{sh}(\psi) & \text{ch}(\psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2.7)$$

Аналогично записываются матрицы преобразований Лоренца, связанных с движением вдоль других координатных осей. Таким образом, группа Лоренца является шестипараметрической группой Ли. Каноническими параметрами для нее могут служить три угла поворотов трехмерного евклидова пространства ϕ_i , и три параметра «гиперболических поворотов» ψ_i .

4.3 Генераторы группы Лоренца

Используя (4.2.7), можно получить явный вид генераторов бустов N_i . Учитывая, что вращения не затрагивают временную компоненту векторов в пространстве Минковского, то несложно выписать и явный вид генераторов пространственных вращений (см. (2.2.2) и (2.2.3)). В результате получаем

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & M_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 N_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & M_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 N_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & M_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Структура алгебры Ли определяется следующими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned}
 [M_i, M_j] &= e_{ijk} M_k, \\
 [N_i, N_j] &= -e_{ijk} M_k, \\
 [N_i, M_j] &= e_{ijk} N_k.
 \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Если ввести эрмитовы матрицы $J_i = iM_i$, то коммутационные соотноше-

ния примут вид:

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= ie_{ijk}J_k, \\ [N_i, N_j] &= ie_{ijk}J_k, \\ [N_i, J_j] &= ie_{ijk}N_k. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Из (4.3.3) следует, что группа вращений трехмерного пространства является подгруппой группы Лоренца, тогда как совокупность собственно преобразований Лоренца (бустов) подгруппу не образует.

Необходимо отметить физический смысл этих перестановочных соотношений. Из первого уравнения (4.3.3) видно, что изменение последовательности поворотов вокруг двух каких-нибудь осей приводит к дополнительному повороту вокруг третьей оси. Это обстоятельство вполне очевидно. Более неожиданным является дополнительный поворот вектора при изменении последовательности бустов вдоль каких-нибудь двух осей. Это явление, называемое прецессией Томаса, уже упоминалось в связи с обсуждением несимметричности релятивистского закона сложения скоростей в разделе 3.5.

Используя генераторы J_i, N_i , преобразования из группы Лоренца можно представить в форме аналогичной (2.2.4):

$$L_{\mathbf{n},\mathbf{m}}(\phi, \psi) = \exp[-i((\mathbf{J}\mathbf{n})\phi + i(\mathbf{N}\mathbf{m})\psi)]. \quad (4.3.4)$$

Очевидно, что в такой форме можно записать и операторы любого *конечномерного* представления группы Лоренца, если в качестве J_i, N_i выбрать не генераторы фундаментального представления², определяемые формулами (4.3.1), а генераторы любого неприводимого конечномерного представления.

²То есть представления, элементы которого совпадают с матрицами, составляющими группу Лоренца. По построению, такое представление неприводимо.

4.4 Неприводимые конечномерные представления

Набор неприводимых представлений группы Лоренца гораздо богаче, чем у группы вращений. Детальное описание нахождения этих представлений дано в книге И.М. Гельфанда и др.³. Здесь мы рассмотрим только конечномерные неприводимые представления, используя процедуру комплексного расширения алгебры Ли.

Введем операторы

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{2}(J_i + N_i), & A_i^\dagger &= A_i, \\ B_i &= \frac{1}{2}(J_i - N_i), & B_i^\dagger &= B_i. \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Коммутационные соотношения для этих операторов имеют вид

$$\begin{aligned} [A_i, A_j] &= ie_{ijk}A_k, \\ [B_i, B_j] &= ie_{ijk}B_k, \\ [A_i, B_j] &= 0, \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

то есть коммутационные соотношения для A_i и B_i по форме совпадают с коммутационными соотношениями для генераторов группы вращений. Следовательно, операторы A^2 и B^2 — операторы Казимира для алгебры Ли группы Лоренца:

$$\begin{aligned} [A^2, A_i] &= 0, & [A^2, B_i] &= 0, \\ [B^2, A_i] &= 0, & [B^2, B_i] &= 0. \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Как было показано при рассмотрении группы вращений, собственные значения операторов A^2 и B^2 определяются неотрицательными полуцелыми числами j, j' . Они равны $j(j+1)$ и $j'(j'+1)$ соответственно. Таким

³И.М. Гельфанд, Р.А. Минлос, З.Я. Шапиро, *Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения*, М., Наука (1984).

образом, конечномерные представления группы Лоренца характеризуются парой чисел $\{j, j'\}$, а их размерность равна

$$n = (2j + 1)(2j' + 1). \quad (4.4.4)$$

Причем представления, характеризующиеся парами $\{j, j'\}$ и $\{j', j\}$, различны; они комплексно сопряжены друг другу. Как можно показать, все конечномерные представления (кроме тривиального) не являются унитарными, так как сохраняющаяся билинейная форма (скалярное произведение) не является знакоопределенной⁴.

4.5 Антисимметричные тензоры

Рассмотренные нами 4-векторы представляют собой пространство фундаментального представления группы Лоренца. Как уже упоминалось, это представление неприводимо. По введенной в разделе 4.4 классификации оно отвечает паре $\{1/2, 1/2\}$. Действительно, размерность такого представления, вычисленная по формуле (4.4.4), равна четырем, как и положено для 4-векторов. И это единственный вариант выбора, при котором возникает размерность четыре и представление совпадает с комплексно сопряженным. Последнее условие необходимо, так как наблюдаемые величины должны описываться действительными числами.

Если восстановить индексы суммирования, то преобразование 4-векторов записывается следующим образом:

$$p'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} p^{\nu} = \{p'^0, p'^1, p'^2, p'^3\}. \quad (4.5.1)$$

⁴Кроме конечномерных, у группы Лоренца имеются бесконечномерные неприводимые представления, причем среди них имеются и унитарные.

Если рассматривать чистые повороты, то нулевая компонента 4-вектора p^0 есть скаляр относительно преобразований группы вращений, а пространственные компоненты \mathbf{p} преобразуются как трехмерный вектор. Действительно, для чистых вращений матрицы преобразований Лоренца имеют вид

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & \mathcal{R} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad (4.5.2)$$

где \mathcal{R} — ортогональные матрицы 3×3 . Очевидно, что в этом случае $p'^0 = p^0$, а $p'_i = \mathcal{R}_{ij}p_j$.

Более сложный объект — четырехмерные тензоры второго ранга $A^{\mu\nu}$. Они преобразуются как прямое произведение 4-векторов. Однако очевидно, что тензоры второго ранга общего вида не образуют пространство неприводимого представления группы Лоренца. Так же как и для группы вращений, они могут быть разложены в прямую сумму пространств неприводимых представлений. Наиболее интересным для физических приложений является пространство антисимметричных тензоров.

Антисимметричные тензоры имеют шесть независимых компонент. По традиции, эти компоненты перечисляются следующим образом:

$$A^{\mu\nu} = (\mathbf{p}, \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ -p_1 & 0 & -a_3 & a_2 \\ -p_2 & a_3 & 0 & -a_1 \\ -p_3 & -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5.3)$$

Относительно чистых поворотов наборы чисел p_i и a_i ведут себя как компоненты трехмерных векторов, причем \mathbf{p} — обычный (полярный) вектор,

компоненты которого изменяют знак при отражении пространственных осей координат, а \mathbf{a} — аксиальный вектор, его компоненты не меняют знак при отражении пространственных осей координат.

Действительно,

$$A'^{\mu\nu} = L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta A^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & p'_1 & p'_2 & p'_3 \\ -p'_1 & 0 & -a'_3 & a'_2 \\ -p'_2 & a'_3 & 0 & -a'_1 \\ -p'_3 & -a'_2 & a'_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5.4)$$

Так как для чистых вращений матрицы преобразований Лоренца имеют вид (4.5.2), то очевидно, что $p'_i = \mathcal{R}_{ij}p_j$ и при отражении пространственных осей \mathbf{p} меняет знак. Чтобы найти закон преобразования для \mathbf{a} , используя вполне антисимметричный тензор Леви-Чивита e_{ijk} , можно записать

$$a_{ij} = -e_{ijk}a_k = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5.5)$$

Следовательно,

$$a'_{ij} = -\mathcal{R}_{il}\mathcal{R}_{jm}e_{lmn}a_n = \begin{pmatrix} 0 & -a'_3 & a'_2 \\ a'_3 & 0 & -a'_1 \\ -a'_2 & a'_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5.6)$$

Величина \mathbf{a} будет преобразовываться как аксиальный вектор, если

$$\mathcal{R}_{il}\mathcal{R}_{jm}e_{lmn} = e_{ijs}\mathcal{R}_{sn}\text{Det}\mathcal{R}, \quad (4.5.7)$$

причем $\text{Det}\mathcal{R} = \pm 1$, так как матрица \mathcal{R} ортогональна. Определитель равен $+1$, если отражения осей нет, и равен -1 , если отражение осей есть. Умножим (4.5.7) на \mathcal{R}_{kn} . Так как $\mathcal{R}_{kn}\mathcal{R}_{sn} = \mathcal{R}_{kn}\mathcal{R}_{ns}^T = \delta_{ks}$, где δ_{ks} — символ

Кронекера, то из (4.5.7) следует

$$\mathcal{R}_{il}\mathcal{R}_{jm}\mathcal{R}_{kn}e_{lmn} = e_{ijk}\text{Det}\mathcal{R}. \quad (4.5.8)$$

Таким образом, для выполнения соотношения (4.5.7), необходимо, чтобы тензор Леви-Чивита имел один и тот же вид в любой координатной системе, не меняя знак при отражении осей, то есть должен вести себя как псевдотензор. Однако тензор Леви-Чивита таким образом и определен. Следовательно, \mathbf{a} — аксиальный вектор.

Однако антисимметричные тензоры не являются пространством неприводимого представления группы Лоренца L_+^\uparrow . Это сразу видно из анализа формулы (4.4.4). Размерность шесть имеют представления $\{1, 1/2\}$ и $\{1/2, 1\}$, однако они не являются действительными. Размерность шесть имеет прямая сумма представлений $\{0, 1\} \oplus \{1, 0\}$, которая является неприводимым представлением ортохронной группы $L^\uparrow = L_+^\uparrow \cup L_-^\uparrow$ и содержит пространственные отражения. Пространства представлений $\{0, 1\}$ и $\{1, 0\}$ можно реализовать как множества комплексных векторов $\mathbf{b}_\pm = \mathbf{p} \pm i\mathbf{a}$, что дает возможность построить вещественное представление их прямой суммы в виде тензорного представления (4.5.3). Необходимо отметить, что при полном отражении, которое включает в себя не только отражение пространства, но и отражение времени, знак тензора (4.5.3) не изменяется.

Кроме тензорного представления (4.5.3), можно сконструировать еще одно вещественное, но псевдотензорное, представление для прямой суммы $\{0, 1\} \oplus \{1, 0\}$. Для этого, по аналогии с тензором Леви-Чивита, введем вполне антисимметричный псевдотензор четвертого ранга в пространстве Минковского $e^{\mu\nu\rho\lambda}$. Этот тензор определен следующим образом. Если числа $(\mu\nu\rho\lambda)$ образуют четную перестановку относительно (0123) , то соответствующий элемент тензора равен $+1$, если нечетную, то -1 . Если какие-то

из чисел набора $(\mu\nu\rho\lambda)$ совпадают, то элемент равен нулю. В частности, $e^{0123} = 1$, и, соответственно, $e_{0123} = -1$. Используя этот псевдотензор, можно построить так называемый дуальный тензор

$${}^*A^{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2} e^{\mu\nu\rho\lambda} A_{\rho\lambda}, \quad {}^{**}A^{\mu\nu} = -A^{\mu\nu}. \quad (4.5.9)$$

Явный вид компонент этого тензора

$${}^*A^{\mu\nu} = (\mathbf{a}, -\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & 0 & p_3 & -p_2 \\ -a_2 & -p_3 & 0 & p_1 \\ -a_3 & p_2 & -p_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.5.10)$$

то есть он получается заменой полярного вектора \mathbf{p} на аксиальный \mathbf{a} , а аксиального \mathbf{a} на $-\mathbf{p}$.

По аналогии со скалярным произведением 4-векторов, которое инвариантно относительно преобразований группы Лоренца, из тензоров (4.5.3) и (4.5.10), свертывая их по индексам, также можно составить инвариантные величины. Поскольку тензоры (4.5.3) и (4.5.10) антисимметричны, то их следы равны нулю. Поэтому для нахождения нетривиальных инвариантов необходимо рассмотреть квадратичные комбинации этих тензоров. Так называемый первый инвариант

$$I_1 = \frac{1}{4} A^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} {}^*A^{\mu\nu} {}^*A_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}^2 - \mathbf{p}^2) \quad (4.5.11)$$

является скаляром, а второй инвариант

$$I_2 = \frac{1}{4} {}^*A^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = -(\mathbf{p}\mathbf{a}) \quad (4.5.12)$$

является псевдоскаляром. Можно показать, что инвариантные свертки, составленные из большего числа тензоров, выражаются через I_1 и I_2 (см. приложение А.3).

Глава 5

Релятивистская динамика

5.1 Уравнение Лоренца

Выясним теперь, как должно выглядеть уравнение, описывающее динамику массивной частицы. Напомним еще раз, что в нерелятивистском случае динамическое уравнение определяется вторым законом Ньютона $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$. Этим законом, который, как и остальные два, представляет собой основу механики, фактически постулируется, что закон движения определяется только начальными координатами и скоростями. Для материальной точки имеем

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}, t), \quad (5.1.1)$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор частицы, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ — импульс частицы, а точкой обозначено дифференцирование по времени лабораторной системы отсчета. Такой вид уравнения обеспечивает его ковариантность относительно преобразований из группы Галилея.

Будем считать, что релятивистский закон движения также должен определяться только начальными координатами и скоростями, но потребуем ковариантность уравнения относительно группы Лоренца. Это требование

приводит к тому, что в левой и правой частях динамического уравнения должны стоять 4-векторы. Однако лабораторное время представляет собой одну из координат пространства событий и не является 4-скаляром. Единственно возможный выбор параметра, характеризующего эволюцию частицы, — ее собственное время. К сожалению, это сразу указывает на то, что последовательное релятивистское описание системы частиц крайне затруднено, так как собственное время у всех частиц разное. Поэтому мы ограничимся уравнением для описания материальной точки.

В нерелятивистском случае пространственная часть искомого уравнения должна переходить в (5.1.1). Следовательно, четырехмерное обобщение импульса должно быть пропорционально 4-скорости частицы. Из соображений размерности

$$p^\mu = \{p^0, \mathbf{p}\} = mcu^\mu, \quad (5.1.2)$$

причем параметр m , имеющий смысл массы частицы, должен быть константой. Поскольку производная 4-скорости по собственному времени — 4-ускорение w^μ — ортогональна 4-скорости, то есть $w^\mu u_\mu = 0$, то правая часть релятивистского обобщения (5.1.1) должна быть пропорциональна свертке некоторого антисимметричного тензора $A^{\mu\nu}$ и 4-скорости. Поэтому наиболее общий вид динамического уравнения для релятивистской частицы записывается следующим образом:

$$mc \frac{du^\mu}{d\tau} = A^{\mu\nu} u_\nu. \quad (5.1.3)$$

Для удобства описания электромагнитного взаимодействия заряженной частицы переобозначим $A^{\mu\nu} = eF^{\mu\nu}$. Тогда уравнение (5.1.3) принимает вид

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^{\mu\nu} u_\nu. \quad (5.1.4)$$

Перечислим компоненты введенного тензора $F^{\mu\nu}$ явно:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.1.5)$$

Поэтому в трехмерной форме уравнение (5.1.4) записывается так:

$$\begin{aligned} \frac{du^0}{d\tau} &= \frac{e}{mc}(\mathbf{u}\mathbf{E}), \\ \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} &= \frac{e}{mc} \{u^0\mathbf{E} + [\mathbf{u} \times \mathbf{B}]\}. \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Если перейти к дифференцированию по лабораторному времени, то система уравнений (5.1.6) приводится к виду, который должен быть справедлив как для релятивистского, так и для нерелятивистского случая

$$\begin{aligned} \frac{dp^0}{dt} &= \frac{e}{c}(\mathbf{v}\mathbf{E}), \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right\}. \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

Выражение в правой части второго уравнения (5.1.7) представляет собой обобщенную силу Лоренца, если отождествить \mathbf{E} с напряженностью электрического поля, \mathbf{B} — с магнитной индукцией, а e — с зарядом частицы¹. Поэтому в его левой части должна стоять производная импульса частицы.

Используя принцип соответствия, можно сделать вывод, что

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (5.1.8)$$

¹Здесь и в дальнейшем, когда речь будет идти о заряде точечной частицы, мы будем обозначать ее заряд символом e , а не q . Это напоминание о том, что реально до релятивистских скоростей мы можем разгонять только частицы, которые раньше было принято называть «элементарными» — электроны, протоны и т. д., а также ионизированные атомы. Заряды этих частиц равны или кратны элементарному заряду, то есть заряду электрона, который принято обозначать как e , причем $|e| = 1,6021766208(98) \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$.

имеет смысл трехмерного релятивистского импульса. А напряженность электрического поля и магнитная индукция в релятивистской теории являются компонентами антисимметричного 4-тензора $F^{\mu\nu}$ (см. (5.1.5)). Этот тензор называется тензором электромагнитного поля. Поскольку импульс \mathbf{p} преобразуется при пространственных вращениях как полярный вектор, то, как следует из общих свойств антисимметричных тензоров, рассмотренных в предыдущем параграфе, вектор \mathbf{E} является полярным вектором, а вектор \mathbf{B} — аксиальным.

Рассмотрим теперь первое уравнение системы (5.1.7). В его правой части стоит (с точностью до коэффициента $1/c$) мощность силы, действующей на заряд со стороны электрического поля. Поэтому нулевая компонента 4-импульса p^0 должна быть пропорциональна энергии. То есть энергия частицы \mathcal{E} определяется соотношением

$$\mathcal{E} = cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (5.1.9)$$

Таким образом, 4-импульс

$$p^\mu = mcu^\mu = \left\{ \frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p} \right\}. \quad (5.1.10)$$

Очевидно, что

$$p^\mu p_\mu = (\mathcal{E}/c)^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2 c^2, \quad (5.1.11)$$

откуда следует закон дисперсии, то есть зависимость энергии тела от его импульса:

$$\mathcal{E} = \pm \sqrt{|\mathbf{p}|^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (5.1.12)$$

В классической теории необходимо в формуле (5.1.12) выбрать знак «+». Знак «−» приобретает смысл в квантовой теории при описании антича-

стиц. Приближенно можно записать

$$\mathcal{E} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{|\mathbf{p}|^2}{m^2 c^2}} \approx mc^2 + \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right). \quad (5.1.13)$$

В формуле (5.1.13) член

$$\frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} = \frac{m|\mathbf{v}|^2}{2} \quad (5.1.14)$$

представляет собой выражение для кинетической энергии ньютоновской механики, а

$$\mathcal{E}_0 = mc^2 \quad (5.1.15)$$

— так называемая энергия покоя тела^{2,3}.

Релятивистское динамическое уравнение (5.1.4) называется уравнением Лоренца. Чтобы более детально понять смысл этого уравнения, запишем его в матричной форме

$$\frac{d\underline{u}}{d\tau} = \frac{e}{mc} F \underline{u}. \quad (5.1.16)$$

Здесь

$$F = F^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{E}\mathbf{N}) + i(\mathbf{B}\mathbf{J}), \quad (5.1.17)$$

где \mathbf{N}, \mathbf{J} — эрмитовы генераторы группы Лоренца (см. (4.3.1)). Такая запись показывает, что уравнение Лоренца задает однопараметрическую подгруппу группы, локально изоморфной группе Лоренца. Эта подгруппа параметризована собственным временем и определяет мировую линию частицы.

²Необходимо отметить, что для макроскопических тел \mathcal{E}_0 весьма велика. Так, если масса тела составляет 1 грамм, то $\mathcal{E}_0 \approx 10^{14}$ джоулей. Эта энергия несколько больше, чем энергия, выделившаяся при ядерном взрыве над Хиросимой.

³Для безмассовых объектов (фотонов в вакууме) закон дисперсии имеет вид $\mathcal{E} = c|\mathbf{p}|$. Энергия покоя у них равна нулю, откуда следует, что фотоны всегда движутся со скоростью света.

Если поля постоянны и однородны, то мировая линия частицы задается глобально. Уравнение Лоренца в этом случае представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка для нахождения 4-скорости частицы. Интегрирование $u^\mu(\tau)$ для нахождения $x^\mu(\tau)$ тривиально. Для определения закона движения в лабораторной системе отсчета необходимо из системы уравнений $x^\mu = x^\mu(\tau)$ исключить параметр τ .

Если же поля изменяются при переходе от одной точки пространства Минковского к другой, то мировая линия определяется локально и необходимо рассматривать последовательность бесконечно малых преобразования Лоренца. Уравнение Лоренца при этом становится сложным нелинейным уравнением.

5.2 Свободная частица

Для свободной частицы уравнение Лоренца (5.1.3) сводится к

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = 0. \quad (5.2.1)$$

Поэтому

$$u^\mu = u_0^\mu = \text{const} \Rightarrow \frac{1}{c} \frac{dx^\mu}{d\tau} = u_0^\mu \Rightarrow (x^\mu - x_0^\mu) = cu_0^\mu \tau. \quad (5.2.2)$$

Следовательно, так как $\mathbf{u}_0/u_0^0 = \mathbf{v}_0/c$, то

$$\begin{aligned} x^0 - x_0^0 &= c(t - t_0) = cu_0^0 \tau \Rightarrow \tau = \frac{t - t_0}{u_0^0}, \\ \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 &= c\mathbf{u}_0 \tau \Rightarrow \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{v}_0(t - t_0). \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Таким образом, свободная частица движется с постоянной скоростью, как и в нерелятивистском случае.

5.3 Частица в постоянном однородном магнитном поле

Рассмотрим случай, когда $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} = \text{const}$. Будем считать, что вектор магнитной индукции направлен вдоль третьей оси, то есть $\mathbf{B} = \{0, 0, B\}$. Тогда (см. (5.1.17)) $F = iBJ_3$. Следовательно, решение уравнения (5.1.16) имеет вид

$$\underline{u} = \exp(i\omega_c \tau J_3) \underline{u}_0, \quad (5.3.1)$$

где $\omega_c = eB/mc$. Этот параметр называется циклотронной частотой.

Преобразование матричной экспоненты дает

$$\underline{u} = \{I - (J_3)^2 + (J_3)^2 \cos(\omega_c \tau) + iJ_3 \sin(\omega_c \tau)\} \underline{u}_0. \quad (5.3.2)$$

Из соотношения (5.3.2) видно, что

$$u^0 = u_0^0 = \text{const}, \quad u^3 = u_0^3 = \text{const}, \quad (5.3.3)$$

вследствие чего

$$|\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{v}_0|^2 = \text{const}, \quad v^3 = v_0^3 = \text{const}. \quad (5.3.4)$$

Таким образом, при движении заряженной частицы в магнитном поле ее скорость не изменяется по абсолютной величине, а меняет только свое направление, причем проекция скорости на направление магнитного поля постоянна.

Поскольку $\underline{u} = \frac{1}{c} \frac{d\underline{x}}{d\tau}$, то

$$\underline{x} - \underline{x}_0 = \left\{ (I - (J_3)^2) c\tau + \frac{c}{\omega_c} [(J_3)^2 \sin(\omega_c \tau) - iJ_3 \cos(\omega_c \tau)] \right\} \underline{u}_0. \quad (5.3.5)$$

В явном виде

$$\underline{x} - \underline{x}_0 = \begin{pmatrix} c\tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{\omega_c} \sin(\omega_c \tau) & -\frac{c}{\omega_c} \cos(\omega_c \tau) & 0 \\ 0 & \frac{c}{\omega_c} \cos(\omega_c \tau) & \frac{c}{\omega_c} \sin(\omega_c \tau) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^0 \\ u_0^1 \\ u_0^2 \\ u_0^3 \end{pmatrix}. \quad (5.3.6)$$

Учитывая, что лоренц-фактор $\gamma = u_0 = \text{const}$, получаем

$$\begin{aligned} x^0 - x_0^0 &= c(t - t_0) = u_0^0 c\tau \Rightarrow \tau = (t - t_0)/\gamma, \\ x^1 - x_0^1 &= \frac{c}{\omega_c} u_0^1 \sin(\omega_c \tau) - \frac{c}{\omega_c} u_0^2 \cos(\omega_c \tau) = \\ &= \frac{\gamma}{\omega_c} v_0^1 \sin(\omega_c(t - t_0)/\gamma) - \frac{\gamma}{\omega_c} v_0^2 \cos(\omega_c(t - t_0)/\gamma), \\ x^2 - x_0^2 &= \frac{c}{\omega_c} u_0^2 \sin(\omega_c \tau) + \frac{c}{\omega_c} u_0^1 \cos(\omega_c \tau) = \\ &= \frac{\gamma}{\omega_c} v_0^2 \sin(\omega_c(t - t_0)/\gamma) + \frac{\gamma}{\omega_c} v_0^1 \cos(\omega_c(t - t_0)/\gamma), \\ x^3 - x_0^3 &= u_0^3 c\tau = u_0^3 c(t - t_0)/u_0^0 = v_0^3(t - t_0). \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

Отсюда следует, что

$$(x^1 - x_0^1)^2 + (x^2 - x_0^2)^2 = \left(\frac{\gamma v_\perp}{\omega_c} \right)^2, \quad (5.3.8)$$

где $v_\perp = \sqrt{(v_0^1)^2 + (v_0^2)^2}$. То есть частица движется по винтовой линии с радиусом $R = \frac{\gamma v_\perp}{\omega_c}$, а ее круговая частота $\omega = \frac{\omega_c}{\gamma}$. В нерелятивистском случае, когда $\gamma \approx 1$, круговая частота не зависит от скорости и равна циклотронной частоте ω_c .

5.4 Частица в постоянном однородном электрическом поле

Рассмотрим случай, когда $\mathbf{E} = \text{const}$, $\mathbf{B} = 0$. Будем считать, что вектор напряженности электрического поля направлен вдоль первой оси, то есть

$\mathbf{E} = \{E, 0, 0\}$. Тогда (см. (5.1.17)) $F = EN_1$. Следовательно, решение уравнения (5.1.16) имеет вид

$$\underline{u} = \exp(\omega'_c \tau N_1) \underline{u}_0, \quad (5.4.1)$$

где $\omega'_c = eE/mc$. Преобразование матричной экспоненты дает

$$\underline{u} = \{I - (N_1)^2 + (N_1)^2 \operatorname{ch}(\omega'_c \tau) + N_1 \operatorname{sh}(\omega'_c \tau)\} \underline{u}_0. \quad (5.4.2)$$

Поскольку $\underline{u} = \frac{1}{c} \frac{d\underline{x}}{d\tau}$, то

$$\underline{x} - \underline{x}_0 = \left\{ (I - (N_1)^2) c\tau + \frac{c}{\omega'_c} [(N_1)^2 \operatorname{sh}(\omega'_c \tau) + N_1 \operatorname{ch}(\omega'_c \tau)] \right\} \underline{u}_0. \quad (5.4.3)$$

В явном виде

$$\underline{x} - \underline{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{c}{\omega'_c} \operatorname{sh}(\omega'_c \tau) & \frac{c}{\omega'_c} \operatorname{ch}(\omega'_c \tau) & 0 & 0 \\ \frac{c}{\omega'_c} \operatorname{ch}(\omega'_c \tau) & \frac{c}{\omega'_c} \operatorname{sh}(\omega'_c \tau) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^0 \\ u_0^1 \\ u_0^2 \\ u_0^3 \end{pmatrix}. \quad (5.4.4)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x^0 - x_0^0 &= c(t - t_0) = \frac{c}{\omega'_c} u_0^1 \operatorname{ch}(\omega'_c \tau) + \frac{c}{\omega'_c} u_0^0 \operatorname{sh}(\omega'_c \tau), \\ x^1 - x_0^1 &= \frac{c}{\omega'_c} u_0^0 \operatorname{ch}(\omega'_c \tau) + \frac{c}{\omega'_c} u_0^1 \operatorname{sh}(\omega'_c \tau), \\ x^2 - x_0^2 &= u_0^2 c\tau, \\ x^3 - x_0^3 &= u_0^3 c\tau. \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

Для большей наглядности положим $u_0^1 = u_0^3 = 0$, то есть будем считать, что начальная скорость частицы v_0 направлена перпендикулярно вектору напряженности электрического поля вдоль второй оси. Тогда, обозначив

$u_0^0 \equiv \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$, получаем

$$\begin{aligned} c(t - t_0) &= \frac{c\gamma_0}{\omega'_c} \operatorname{sh}(\omega'_c \tau), \\ x^1 - x_0^1 &= \frac{c\gamma_0}{\omega'_c} \operatorname{ch}(\omega'_c \tau), \\ x^2 - x_0^2 &= cu_0^2 \tau = v_0 \gamma_0 \tau. \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

Поскольку $\operatorname{ch}^2(\omega'_c \tau) - \operatorname{sh}^2(\omega'_c \tau) = 1$, то

$$\left(\frac{c\gamma_0}{\omega'_c}\right)^2 = (x^1 - x_0^1)^2 - c^2(t - t_0)^2, \quad (5.4.7)$$

то есть

$$x^1 - x_0^1 = \sqrt{\left(\frac{c\gamma_0}{\omega'_c}\right)^2 + c^2(t - t_0)^2} = \frac{c\gamma_0}{\omega'_c} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega'_c}{\gamma_0}\right)^2 (t - t_0)^2}. \quad (5.4.8)$$

При малых значениях лабораторного времени

$$x^1 - x_0^1 \approx \frac{c\gamma_0}{\omega'_c} + \frac{\omega'_c c}{2\gamma_0} (t - t_0)^2 = \frac{mc^2 \gamma_0}{eE} + \frac{eE}{2m\gamma_0} (t - t_0)^2. \quad (5.4.9)$$

В нерелятивистском случае, когда $\gamma_0 \approx 1$, то есть начальная энергия частицы практически равна энергии покоя,

$$x^1 - x_0^1 = \frac{mc^2}{eE} + \frac{eE}{2m} (t - t_0)^2. \quad (5.4.10)$$

Таким образом, мы получаем известную из курса элементарной физики формулу для зависимости от времени координаты тела при движении с постоянным ускорением $a = eE/m$.

Чтобы найти траекторию движения, учтем, что собственное время $\tau = (x^2 - x_0^2)/v_0 \gamma_0$. Подставляя это соотношение во второе уравнение в (5.4.6), получаем

$$x^1 - x_0^1 = \frac{mc^2 \gamma_0}{eE} \operatorname{ch}\left(\frac{eE}{mc} \frac{(x^2 - x_0^2)}{v_0 \gamma_0}\right). \quad (5.4.11)$$

Следовательно, релятивистская частица движется в постоянном однородном электрическом поле по цепной линии. Считая, что аргумент гиперболического косинуса мал, получаем

$$x^1 - x_0^1 = \frac{mc^2\gamma_0}{eE} + \frac{eE}{2m} \frac{(x^2 - x_0^2)^2}{v_0^2\gamma_0}. \quad (5.4.12)$$

В нерелятивистском случае, когда $\gamma_0 \approx 1$,

$$x^1 - x_0^1 = \frac{mc^2}{eE} + \frac{eE}{2m} \frac{(x^2 - x_0^2)^2}{v_0^2}. \quad (5.4.13)$$

Как и следовало ожидать, траектория представляет собой параболу.

Глава 6

Уравнения электромагнитного поля

6.1 Плотность заряда

Определим электрический заряд как скалярную физическую величину, характеризующую интенсивность электромагнитного взаимодействия между частицами, которые участвуют в этом взаимодействии. Например, носителями заряда являются электроны. Элементарный заряд — это заряд электрона, минимальный заряд, который может непосредственно наблюдаться. С точки зрения квантовой теории, мы должны рассматривать электрон как точечную частицу. Однако в этом случае мы не можем описать заряд с помощью достаточно гладких функций. А иметь такую возможность весьма желательно, поскольку математический аппарат классической физики — это обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных. Поэтому введем понятие плотности заряда

$$\rho(\mathbf{R}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}. \quad (6.1.1)$$

Кажется естественным, что для гладкости функции $\rho(\mathbf{R}, t)$ предел в формуле (6.1.1) надо понимать не в чисто математическом смысле, а считая, что элемент объема ΔV мал по сравнению с характерными размера-

ми заряженной системы, но содержит большое число электронов. Такого рода определение представляется разумным, так как измерение плотности заряда в классической электродинамике подразумевает использование классического прибора — объекта, имеющего макроскопические размеры. Однако эти соображения хороши только в нерелятивистской области.

Действительно, плотность заряда при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой изменяется вследствие лоренцева сокращения, то есть 4-скаляром не является. Однако вследствие единственности системы отсчета, в которой заряд покоится, скаляром является плотность заряда в этой системе отсчета, то есть величина

$$\rho_0(\mathbf{R}, t) = \rho(\mathbf{R}, t) \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (6.1.2)$$

Для описания движения точечного заряда в заданном электромагнитном поле мы ввели вектор 4-скорости u^μ , который удовлетворяет уравнению Лоренца

$$\dot{u}^\mu = \frac{e}{mc} F^{\mu\nu} u_\nu. \quad (6.1.3)$$

Поэтому для описания движения произвольно распределенного заряда надо использовать 4-вектор тока j^μ , который определяется, с точностью до константы c , произведением 4-скорости u^μ на скаляр $\rho_0(\mathbf{R}, t)$:

$$j^\mu = c\rho_0(\mathbf{R}, t)u^\mu = \{c\rho(\mathbf{R}, t), \mathbf{j}(\mathbf{R}, t)\}. \quad (6.1.4)$$

Здесь $\mathbf{j}(\mathbf{R}, t)$ — трехмерный вектор тока, равный

$$\mathbf{j}(\mathbf{R}, t) = \rho(\mathbf{R}, t)\mathbf{v}(\mathbf{R}, t), \quad (6.1.5)$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{R}, t)$ — скорость выделенного элемента объема.

Отсюда следует, что требование лоренц-инвариантности теории входит в противоречие с наивными рассуждениями о переходе к пределу в уравнении (6.1.1), изложенными выше. Для справедливости этих рассуждений

необходимо потребовать, чтобы относительные скорости электронов, содержащихся в выделенном элементе объема ΔV , равнялись нулю. Но очевидно, что указанное требование не является физическим.

Таким образом, в классической электродинамике мы либо должны полностью игнорировать дискретность заряда, либо использовать не только гладкие функции, но и обобщенные.

6.2 Уравнение непрерывности

Рассмотрим соотношение

$$\partial_\mu j^\mu \equiv \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0, \quad (6.2.1)$$

которое называется уравнением непрерывности. По построению это явно инвариантное соотношение, которое выполняется вне зависимости от выбора системы отсчета. Переписанное в трехмерных обозначениях, оно имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{j}. \quad (6.2.2)$$

Проинтегрируем его по некоторому выделенному объему V :

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV. \quad (6.2.3)$$

В силу теоремы Гаусса–Остроградского интеграл в правой части (6.2.3) можно преобразовать в интеграл по границе данного объема

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \oint_{\Gamma_V} (\mathbf{j} \mathbf{n}) dS \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = - \oint_{\Gamma_V} (\mathbf{j} \mathbf{n}) dS, \quad (6.2.4)$$

где \mathbf{n} — нормаль к поверхности Γ_V , а Q — полный заряд в объеме V .

Таким образом, уравнение (6.2.1) представляет собой дифференциальную формулировку закона сохранения заряда, из которого следует, что скорость изменения заряда в данном объеме равна электрическому току через поверхность, которая этот объем ограничивает.

6.3 Уравнения Максвелла

Выведем теперь уравнения, которые определяют электромагнитное поле, создаваемое заданными электрическими зарядами и токами. Будем основываться на принципе суперпозиции, который состоит в том, что поля, создаваемые системой зарядов и токов, представляют собой сумму полей, создаваемых каждым зарядом и током в отдельности. Этот принцип хорошо установлен экспериментально в нерелятивистской области. Из него следует, что искомые уравнения должны быть линейны, причем как по тензору поля $F^{\mu\nu}$, так и по 4-вектору тока j^μ .

Требование лоренц-инвариантности однозначно, с точностью до произвольной положительной константы A , определяет связь между $F^{\mu\nu}$ и j^μ . А именно:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -A j^\mu. \quad (6.3.1)$$

Это уравнение непротиворечиво, так как

$$0 = \partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = -A \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (6.3.2)$$

вследствие уравнения непрерывности (6.2.1). Выбор константы A связан с выбором системы единиц физических величин. Знак правой части (6.3.1), как будет видно из дальнейшего, задается принципом соответствия (фактически, выбором знака правой части уравнения Лоренца

(5.1.3)). Будем считать, что $A = 4\pi/c$. Такой выбор означает, что мы работаем в так называемой гауссовой системе единиц. Чтобы убрать коэффициент 4π в уравнении, необходимо переопределить заряд и тензор поля $F^{\mu\nu} \Rightarrow \sqrt{4\pi}F^{\mu\nu}$, $j^\mu \Rightarrow j^\mu/\sqrt{4\pi}$. Такое изменение масштаба наблюдаемых соответствует рационализованной хевисайдовой системе единиц.

Однако уравнение (6.3.1) не определяет тензор поля однозначно. Действительно, число характеристик поля, которые необходимо определить, а это напряженность электрического поля \mathbf{E} и магнитная индукция \mathbf{B} , больше, чем число соотношений, задаваемых полученным уравнением.

Для того, чтобы найти дополнительные соотношения, вспомним, что электромагнитное поле можно характеризовать не только тензором $F^{\mu\nu}$, но и дуальным тензором $\overset{*}{F}{}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}e^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\rho\lambda}$. Поскольку $\overset{*}{F}{}^{\mu\nu}$ является псевдотензором, то

$$\partial_\nu \overset{*}{F}{}^{\mu\nu} = 0. \quad (6.3.3)$$

Действительно, в правой части (6.3.3) должен стоять псевдовектор, чтобы при пространственно-временных отражениях левая и правая часть уравнения преобразовывались одинаковым образом. Такой псевдовектор можно было бы построить, умножив 4-скорость на некоторый псевдоскаляр. В дуальном тензоре напряженность электрического поля \mathbf{E} и магнитная индукция \mathbf{B} меняются местами (с точностью до знаков): $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$. Поэтому искомый псевдоскаляр должен был бы иметь смысл плотности магнитного заряда в системе покоя. Однако как хорошо установлено экспериментально, магнитных зарядов, по крайней мере, макроскопических, не существует. Отсюда и следует уравнение (6.3.3)¹.

¹Естественно, можно построить формальную теорию, в которой правая часть уравнения (6.3.3) отлична от нуля. В частности, такая теория рассматривалась П. А. М. Дираком (монополю Дирака).

Окончательно,

$$\begin{aligned}\partial_\nu F^{\mu\nu} &= -\frac{4\pi}{c}j^\mu, \\ \partial_\nu \overset{*}{F}^{\mu\nu} &= 0.\end{aligned}\tag{6.3.4}$$

Система (6.3.4) называется уравнениями Максвелла.

Для большей наглядности перепишем эту систему в трехмерных обозначениях². В гауссовой системе единиц СГС имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{E} &= 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}.\end{aligned}\tag{6.3.5}$$

В рационализованной хевисайдовой системе³

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{E} &= \rho, \quad \operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}.\end{aligned}\tag{6.3.6}$$

Интересно посмотреть, как система уравнений Максвелла выглядит в системе единиц СИ, которая используется в школьном курсе элементарной физики. Для этого введем электрическую ε_0 и магнитную μ_0 постоянные, которые связаны соотношением

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}.\tag{6.3.7}$$

Изменим масштаб хевисайдовых единиц следующим образом:

$$\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \Rightarrow c\mathbf{B}, \quad \rho \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \quad \mathbf{j} \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{j}.$$

²В работах Максвелла уравнения были записаны в неудобном для использования виде. Современная векторная форма уравнений была получена в работах Г. Герца и О. Хевисайда.

³В современной физической литературе, особенно по квантовой теории поля, часто используется вариант хевисайдовой системы единиц, в котором значения скорости света и постоянной Планка считаются равными единице, то есть $c = \hbar = 1$. Правила соответствия для этой системы единиц и СГС даны в Приложении А.5.

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

причем величина ε_0 подбирается таким образом, что сила тока измеряется в амперах.

Система единиц СИ удобна для электротехнических расчетов. Из формул (6.3.8) видно, что для медленно меняющихся полей член $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, так называемый ток смещения, относительно мал. Однако включение данного члена в уравнения электромагнетизма является основной заслугой Максвелла. Все остальное было известно до него. Важность тока смещения обусловлена тем, что именно его включение в систему уравнений дает возможность описать распространение электромагнитных волн. Экспериментально электромагнитные волны были обнаружены Г. Герцем, что подтвердило правильность уравнений Максвелла⁴.

Чтобы прояснить физический смысл уравнений Максвелла, запишем их в интегральной форме. Проинтегрируем первое и третье уравнения из (6.3.5) по некоторой пространственной области V :

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{E} \, dV = 4\pi \int_V \rho \, dV, \quad \int_V \operatorname{div} \mathbf{B} \, dV = 0. \quad (6.3.9)$$

Используя теорему Гаусса–Остроградского, перейдем к интегрированию

⁴Генрих Герц поставил свой эксперимент, основываясь на решениях уравнений Максвелла, которые сам же получил, используя оригинальный анзац (вектор Герца). Если бы не ранняя смерть в возрасте 36 лет, то, скорее всего, он был бы одним из первых Нобелевских лауреатов по физике. Нобелевскую премию получил его племянник, Густав Герц, за опыт Франка и Герца. Этот опыт подтвердил дискретность энергетических уровней атомов и стал одной из экспериментальных основ квантовой механики. Следует отметить, что Густав Герц впоследствии стал лауреатом и Сталинской премии.

по границам этой области. Тогда

$$\oint_{\Gamma_V} (\mathbf{E}\mathbf{n}) dS = 4\pi Q, \quad (6.3.10)$$

$$\oint_{\Gamma_V} (\mathbf{B}\mathbf{n}) dS = 0. \quad (6.3.11)$$

Проинтегрируем второе и четвертое уравнения из (6.3.5) по некоторой пространственной поверхности S :

$$\begin{aligned} \int_S (\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{E}) dS &= -\frac{1}{c} \int_S \left(\mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dS, \\ \int_S (\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{B}) dS &= \frac{4\pi}{c} \int_S (\mathbf{n} \mathbf{j}) dS + \frac{1}{c} \int_S \left(\mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) dS. \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

Используя теорему Стокса, перейдем к интегрированию по границам этой поверхности. Тогда

$$\oint_{\Gamma_S} (\mathbf{E}\mathbf{l}) dl = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S (\mathbf{B}\mathbf{n}) dS. \quad (6.3.13)$$

$$\oint_{\Gamma_S} (\mathbf{B}\mathbf{l}) dl = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S (\mathbf{E}\mathbf{n}) dS. \quad (6.3.14)$$

Уравнения (6.3.10), (6.3.11), (6.3.13), (6.3.14) представляют собой систему уравнений Максвелла в интегральной форме. Смысл этих уравнений вполне очевиден.

Уравнение (6.3.10) — это теорема Гаусса для электрического поля. Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность с точностью до постоянного коэффициента равен электрическому заряду, находящемуся внутри этой поверхности:

$$\Phi_{\mathbf{E}} = 4\pi Q. \quad (6.3.15)$$

Как уже говорилось в начале курса, закон Кулона является следствием теоремы Гаусса.

Уравнение (6.3.11) — это теорема Гаусса для магнитного поля. Поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность равен нулю:

$$\Phi_{\mathbf{B}} = 0. \quad (6.3.16)$$

То есть уравнение (6.3.16) отражает тот факт, что в природе магнитные заряды отсутствуют.

Из уравнения (6.3.13) следует, что циркуляция вектора напряженности электрического поля по произвольному контуру определяется скоростью изменения магнитного потока через произвольную поверхность, натянутую на этот контур:

$$\oint_{\Gamma_S} (\mathbf{E} | dl = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_{\mathbf{B}}}{dt}. \quad (6.3.17)$$

Если выбранный контур представляет собой реальный проводник, то циркуляция вектора \mathbf{E} есть ЭДС:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_{\mathbf{B}}}{dt}. \quad (6.3.18)$$

То есть уравнение (6.3.17) выражает собой закон электромагнитной индукции Фарадея, причем знак минус в его правой части обусловлен так называемым правилом Ленца.

Из уравнения (6.3.14) следует, что циркуляция вектора магнитной индукции по произвольному контуру определяется как электрическим током, так и скоростью изменения потока вектора напряженности электрического поля через произвольную поверхность, натянутую на этот контур:

$$\oint_{\Gamma_S} (\mathbf{B} | dl = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{d\Phi_{\mathbf{E}}}{dt}. \quad (6.3.19)$$

Возникновение магнитного поля вокруг проводника с током — это закон Био–Савара, а необходимость введения тока смещения обусловлена принципом сохранения электрического заряда.

Действительно, произвольность выбора поверхности для вычисления магнитного потока в уравнении (6.3.17) связана с отсутствием магнитных зарядов. Поток же вектора \mathbf{E} через замкнутую поверхность определяется уравнением (6.3.15). Поэтому в силу уравнения непрерывности (6.2.4) требование произвольности выбора поверхности, относительно которой вычисляется поток вектора тока (то есть сила тока), неизбежно приводит к появлению в правой части (6.3.19) тока смещения⁵.

Таким образом, система уравнений Максвелла, полученная нами из чисто математических соображений, вполне согласуется с экспериментально найденными закономерностями.

6.4 Простейшие решения уравнений Максвелла

Простейшие решения уравнений Максвелла можно найти, используя их интегральную форму.

1. Поле неподвижного точечного заряда q , находящегося в начале координат на расстоянии R от него:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{R^2} \mathbf{n}, \quad (6.4.1)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ — единичный вектор. Формула (6.4.1) выражает закон Кулона.

⁵Требование произвольности выбора поверхности, относительно которой вычисляется поток вектора тока, вполне естественно, так как постановка эксперимента по определению силы тока, то есть выбор указанной поверхности, не может оказать влияния на измерение величины магнитного поля.

2. Поле неподвижного равномерно заряженного шара, имеющего радиус R_0 , с центром в начале координат и полным зарядом q :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{q}{R^2} \mathbf{n}, & R \geq R_0; \\ \mathbf{E} &= \frac{q}{R_0^3} \mathbf{R}, & R < R_0. \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

Соотношения (6.4.1) и (6.4.2) прямо вытекают из уравнения (6.3.10), если учесть сферическую симметрию рассматриваемых систем. Вследствие уравнения (6.3.19) магнитное поле этими системами не создается. График зависимости напряженности поля от расстояния от центра шара приведен в разделе 7.5.

3. Поле неподвижного бесконечно длинного прямого провода, имеющего радиус R_0 , по которому течет постоянный ток I , равномерно распределенный по сечению проводника.

Вследствие уравнения (6.3.17) электрическое поле током не создается. В силу аксиальной и трансляционной симметрий задачи картина силовых линий магнитного поля, создаваемого током, представляет собой окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных току, с центром на оси провода. Зависимость магнитной индукции от расстояния от оси провода R имеет вид

$$\begin{aligned} |\mathbf{B}| &= \frac{2I}{Rc}, & R \geq R_0; \\ |\mathbf{B}| &= \frac{2IR}{R_0^2 c}, & R < R_0. \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

Соотношения (6.4.3) непосредственно следуют из уравнения (6.3.19).

Введем единичный вектор \mathbf{l} , направленный вдоль направления вектора

плотности тока, и вектор \mathbf{R} , $|\mathbf{R}| = R$, перпендикулярный ему. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{2I}{R^2 c} [\mathbf{1} \times \mathbf{R}], & R \geq R_0; \\ \mathbf{B} &= \frac{2I}{R_0^2 c} [\mathbf{1} \times \mathbf{R}], & R < R_0. \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

График зависимости магнитной индукции от расстояния от оси провода приведен в разделе 7.5.

4. Вновь рассмотрим шар, фигурирующий в примере 2. Создадим сферическую полость в этом шаре, центр которой находится в точке с радиус-вектором \mathbf{R}_1 . Пусть радиус полости равен R_{00} и $R_0 > |\mathbf{R}_1| + R_{00}$, то есть граница полости не выходит за пределы шара. Найдем напряженность электрического поля внутри данной полости.

Для нахождения вектора напряженности электрического поля используем принцип суперпозиции. Будем считать, что поле внутри полости есть сумма поля исходного шара, имеющего радиус R_0 , и шара с радиусом R_{00} , находящегося на месте полости и заряженного зарядом той же плотности, но противоположного знака. Так как полость находится внутри обоих заряженных шаров, то напряженность поля в любой точке полости \mathbf{R}

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \frac{q}{R_0^3} \mathbf{R} - \frac{q}{R_{00}^3} (\mathbf{R} - \mathbf{R}_1) \frac{R_{00}^3}{R_0^3} = \frac{q}{R_0^3} \mathbf{R}_1 \quad (6.4.5)$$

равна напряженности поля, которая была бы в точке, определяющей центр полости, если бы полости в шаре не было! Таким образом, в полости имеется однородное электрическое поле, причем $|\mathbf{E}|$ не зависит от радиуса полости R_{00} .

5. Вновь рассмотрим провод, фигурирующий в примере 3. Создадим в нем цилиндрическое отверстие, с осью параллельной оси провода, положение которой определяется вектором \mathbf{R}_1 . Пусть радиус отверстия равен

R_{00} и $R_0 > |\mathbf{R}| + R_{00}$, то есть граница отверстия не выходит за пределы провода. Найдем магнитную индукцию внутри данного отверстия.

Для нахождения вектора магнитной индукции используем принцип суперпозиции. Будем считать, что поле внутри отверстия есть сумма поля исходного провода, имеющего радиус R_0 , и провода с радиусом R_{00} , находящегося на месте рассматриваемого отверстия, по которому течет ток той же плотности, но в противоположном направлении. Так как отверстие находится внутри обоих проводов, то магнитная индукция в любой точке отверстия \mathbf{R}

$$\mathbf{B}(\mathbf{R}) = \frac{2I}{R_0^2 c} [\mathbf{1} \times \mathbf{R}] - \frac{2I}{R_{00}^2 c} [\mathbf{1} \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_1)] \frac{R_{00}^2}{R_0^2} = \frac{2I}{R_0^2 c} [\mathbf{1} \times \mathbf{R}_1] \quad (6.4.6)$$

равна индукции, которая была бы в точке, определяющей положение оси отверстия, если бы отверстия в проводе не было! Таким образом, в отверстии имеется однородное магнитное поле, причем $|\mathbf{B}|$ не зависит от радиуса отверстия R_{00} .

6.5 Преобразование Лоренца для полей

Рассмотрим преобразование компонент тензора поля $F^{\mu\nu}$ при переходе от одной системы отсчета к другой:

$$F_0^{\mu\nu} = L^\mu_\alpha L^\nu_\beta F^{\alpha\beta}. \quad (6.5.1)$$

Будем считать, что ориентация координатных осей у систем отсчета одинаковы, и эти системы отсчета движутся относительно друг друга со скоростью v , направленной вдоль оси x . Соответствующее преобразование

Лоренца задается матрицей

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.5.2)$$

Матрица, задающая тензор поля в новой системе отсчета, определяется формулой

$$F_0 = LFL^T, \quad (6.5.3)$$

или, в явном виде

$$\begin{aligned} F_0 &= \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma\beta E_x & -\gamma E_x & -E_y & -E_z \\ \gamma E_x & -\gamma\beta E_x & -B_z & B_y \\ \gamma(E_y - \beta B_z) & \gamma(B_z - \beta E_y) & 0 & -B_x \\ \gamma(E_z + \beta B_y) & -\gamma(B_y + \beta E_z) & B_x & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -\gamma(E_y - \beta B_z) & -\gamma(E_z + \beta B_y) \\ E_x & 0 & -\gamma(B_z - \beta E_y) & \gamma(B_y + \beta E_z) \\ \gamma(E_y - \beta B_z) & \gamma(B_z - \beta E_y) & 0 & -B_x \\ \gamma(E_z + \beta B_y) & -\gamma(B_y + \beta E_z) & B_x & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.5.4)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} E_{0x} &= E_x, & B_{0x} &= B_x, \\ E_{0y} &= \gamma(E_y - \beta B_z), & B_{0y} &= \gamma(B_y + \beta E_z), \\ E_{0z} &= \gamma(E_z + \beta B_y), & B_{0z} &= \gamma(B_z - \beta E_y). \end{aligned} \quad (6.5.5)$$

Для обратного преобразования необходимо заменить $\beta \rightarrow -\beta$. Если направление относительной скорости систем отсчета произвольно и задается единичным вектором \mathbf{n} , то, рассуждая таким же образом, как при выводе формулы (3.5.10) для закона сложения скоростей, несложно получить

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \mathbf{E}_{\parallel} + \gamma \mathbf{E}_{\perp} + \beta \gamma [\mathbf{n} \times \mathbf{B}_{\perp}], \\ \mathbf{B}_0 &= \mathbf{B}_{\parallel} + \gamma \mathbf{B}_{\perp} - \beta \gamma [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\perp}], \end{aligned} \quad (6.5.6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\parallel} &= \mathbf{n}(\mathbf{nE}), & \mathbf{E}_{\perp} &= \mathbf{E} - \mathbf{E}_{\parallel}, \\ \mathbf{B}_{\parallel} &= \mathbf{n}(\mathbf{nB}), & \mathbf{B}_{\perp} &= \mathbf{B} - \mathbf{B}_{\parallel}. \end{aligned} \quad (6.5.7)$$

Часто более удобно представить формулы (6.5.6) через 4-скорость начала координат одной системы отсчета относительно другой. При этом

$$u^{\mu} = \{u^0, \mathbf{u}\} = \{\gamma, \gamma \beta \mathbf{n}\}. \quad (6.5.8)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= u^0 \mathbf{E} + [\mathbf{u} \times \mathbf{B}] - \frac{\mathbf{u}(\mathbf{uE})}{1 + u^0}, \\ \mathbf{B}_0 &= u^0 \mathbf{B} - [\mathbf{u} \times \mathbf{E}] - \frac{\mathbf{u}(\mathbf{uB})}{1 + u^0}. \end{aligned} \quad (6.5.9)$$

Можно считать, что формулы (6.5.9) определяют поля в системе покоя частицы, движущейся с 4-скоростью u^{μ} .

Используя прямые вычисления, нетрудно убедиться, что в соответствии с общими положениями теории, инварианты полей сохраняются при переходе из одной системы отсчета в другую, то есть (см. (4.5.11), (4.5.12))

$$|\mathbf{B}_0|^2 - |\mathbf{E}_0|^2 = |\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{E}|^2, \quad (\mathbf{E}_0 \mathbf{B}_0) = (\mathbf{E} \mathbf{B}). \quad (6.5.10)$$

6.6 Постоянные однородные поля

Когда в рассматриваемой области пространства плотность тока и плотность заряда равны нулю, система уравнений Максвелла принимает вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (6.6.1)$$

Так как в (6.6.1) входят только производные от полей, то постоянные однородные поля, то есть поля, характеризующиеся во всем пространстве векторами $\mathbf{E}, \mathbf{B} = \text{const}$, удовлетворяют этой системе уравнений.

В общем случае ориентация векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} может быть произвольной. Однако если первый инвариант поля $I_1 = (|\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{E}|^2)/2 \neq 0$, то всегда существует система отсчета, в которой поля становятся параллельными. Пусть \mathbf{E}, \mathbf{B} не параллельны. Тогда имеют место три выделенных направления в пространстве, которые характеризуются векторами $\mathbf{E}, \mathbf{B}, [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$. Поскольку параллельные движению системы отсчета компоненты полей не изменяются, то единственно возможным направлением движения системы отсчета, в которой поля \mathbf{E}_0 и \mathbf{B}_0 могут стать параллельными, должно характеризоваться скоростью \mathbf{v} , направленной вдоль вектора $[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$. Используя обычные обозначения, компоненты 4-скорости этой системы отсчета относительно исходной можно записать как

$$u^0 = \gamma, \quad \mathbf{u} = \beta\gamma \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{||[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]||}. \quad (6.6.2)$$

Воспользуемся формулами (6.5.9). Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \gamma \mathbf{E} + \beta\gamma \frac{[[\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B}]}{||[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]||} = \frac{\gamma \{ (||[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]|| - \beta|\mathbf{B}|^2)\mathbf{E} + \beta(\mathbf{E}\mathbf{B})\mathbf{B} \}}{||[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]||}, \\ \mathbf{B}_0 &= \gamma \mathbf{B} - \beta\gamma \frac{[[\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \times \mathbf{E}]}{||[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]||} = \frac{\gamma \{ (||[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]|| - \beta|\mathbf{E}|^2)\mathbf{B} + \beta(\mathbf{E}\mathbf{B})\mathbf{E} \}}{||[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]||}. \end{aligned} \quad (6.6.3)$$

Так как векторы \mathbf{E}_0 и \mathbf{V}_0 должны быть параллельны, то

$$[\mathbf{E}_0 \times \mathbf{V}_0] = \gamma^2 \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{V}]}{||[\mathbf{E} \times \mathbf{V}]||^2} \times \\ \times \{ (||[\mathbf{E} \times \mathbf{V}]|| - \beta|\mathbf{V}|^2)(||[\mathbf{E} \times \mathbf{V}]|| - \beta|\mathbf{E}|^2) - \beta^2(\mathbf{E}\mathbf{V})^2 \} = 0. \quad (6.6.4)$$

Поскольку предполагалось, что $[\mathbf{E} \times \mathbf{V}] \neq 0$, то из (6.6.4) следует, что

$$\beta^2 - \beta \frac{|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{V}|^2}{\sqrt{|\mathbf{E}|^2|\mathbf{V}|^2 - (\mathbf{E}\mathbf{V})^2}} + 1 = 0. \quad (6.6.5)$$

Решения этого уравнения

$$\beta_{\pm} = \frac{|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{V}|^2 \pm \sqrt{(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{V}|^2)^2 - 4(|\mathbf{E}|^2|\mathbf{V}|^2 - (\mathbf{E}\mathbf{V})^2)}}{2\sqrt{|\mathbf{E}|^2|\mathbf{V}|^2 - (\mathbf{E}\mathbf{V})^2}} = \\ = \frac{|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{V}|^2 \pm \sqrt{(|\mathbf{V}|^2 - |\mathbf{E}|^2)^2 + 4(\mathbf{E}\mathbf{V})^2}}{2\sqrt{|\mathbf{E}|^2|\mathbf{V}|^2 - (\mathbf{E}\mathbf{V})^2}} > 0. \quad (6.6.6)$$

Так как дискриминант уравнения (6.6.5) неотрицателен, то очевидно, что

$$\frac{|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{V}|^2}{\sqrt{|\mathbf{E}|^2|\mathbf{V}|^2 - (\mathbf{E}\mathbf{V})^2}} \geq 2. \quad (6.6.7)$$

Поэтому, вследствие известной из курса элементарной математики теоремы Виета,

$$\beta_+ + \beta_- \geq 2, \quad \beta_+\beta_- = 1. \quad (6.6.8)$$

Таким образом,

$$\beta_+ \geq 1, \quad \beta_- \leq 1. \quad (6.6.9)$$

Следовательно, искомая скорость системы отсчета определяется соотношением $\beta = \beta_-$, то есть

$$\beta = \frac{|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{V}|^2 - \sqrt{(|\mathbf{V}|^2 - |\mathbf{E}|^2)^2 + 4(\mathbf{E}\mathbf{V})^2}}{2\sqrt{|\mathbf{E}|^2|\mathbf{V}|^2 - (\mathbf{E}\mathbf{V})^2}}. \quad (6.6.10)$$

Если второй инвариант $I_2 = (\mathbf{E}\mathbf{B}) = 0$, то

$$\beta = \frac{|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2 - \left| |\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{E}|^2 \right|}{2|\mathbf{E}||\mathbf{B}|}. \quad (6.6.11)$$

Поэтому, при $I_1 > 0$

$$\beta = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B}|}, \quad \mathbf{E}_0 = 0, \quad \mathbf{B}_0 = \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{E}|^2}{|\mathbf{B}|^2}} \mathbf{B}, \quad (6.6.12)$$

то есть поле в этой системе отсчета чисто магнитное. При $I_1 < 0$

$$\beta = \frac{|\mathbf{B}|}{|\mathbf{E}|}, \quad \mathbf{B}_0 = 0, \quad \mathbf{E}_0 = \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{B}|^2}{|\mathbf{E}|^2}} \mathbf{E}, \quad (6.6.13)$$

то есть поле в этой системе отсчета чисто электрическое.

Если же оба инварианта $I_1 = I_2 = 0$, то есть поле представляет собой так называемое скрещенное поле, $\beta = 1$. Поэтому поставленная задача не имеет решения. Несложно убедиться, что в этом случае во всех системах отсчета, движущихся относительно исходной со скоростью меньшей скорости света, поле остается скрещенным.

Необходимо отметить, что когда поля не являются постоянными и однородными, рассмотренные преобразования можно провести для любой пространственно-временной точки.

6.7 Поле плоской монохроматической волны

Плоская волна задается еще одним решением уравнений Максвелла без токов. Ее поле представляет собой ортогональные и равные по величине поля \mathbf{E} и \mathbf{B} , которые изменяются при переходе от одной к другой точке по гармоническому закону.

Введем ортогональный пространственный базис \mathbf{n} , \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 :

$$|\mathbf{n}| = |\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_2| = 1, \quad (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2) = 0, \quad \mathbf{n} = [\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2]. \quad (6.7.1)$$

Определим четырехмерный волновой вектор

$$k^\mu = \{k^0, \mathbf{k}\} = \left\{ \frac{\omega}{c}, \frac{\omega}{c} \mathbf{n} \right\}, \quad k^2 = 0, \quad (6.7.2)$$

в котором, как будет ясно из дальнейшего, параметр ω имеет смысл круговой частоты волны.

Покажем, что поле, задаваемое формулами (точнее, действительной и мнимой частями этих формул)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E(\mathbf{a}_1 + i\alpha\mathbf{a}_2)e^{-i(kx)}, \\ \mathbf{B} &= E(\mathbf{a}_2 - i\alpha\mathbf{a}_1)e^{-i(kx)} \end{aligned} \quad (6.7.3)$$

удовлетворяет системе уравнений Максвелла без токов (6.6.1). Из (6.7.3) следует, что $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$, $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$. В формулах (6.7.3) параметр α определяет характер поляризации волны. Если $\alpha = 0$, волна называется линейно поляризованной, в ней векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} изменяют только амплитуду. Если $\alpha = \pm 1$, волна называется циркулярно поляризованной, в ней векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} не меняют величину, а вращаются вокруг вектора \mathbf{n} . В общем случае волна называется эллиптически поляризованной. Очевидно, что

$$\mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}], \quad \mathbf{E} = -[\mathbf{n} \times \mathbf{B}]. \quad (6.7.4)$$

Подставив (6.7.3) в (6.6.1), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= i \frac{E\omega}{c} (\mathbf{n}(\mathbf{a}_1 + i\alpha\mathbf{a}_2))e^{-i(kx)} = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= i \frac{E\omega}{c} (\mathbf{n}(\mathbf{a}_2 - i\alpha\mathbf{a}_1))e^{-i(kx)} = 0, \end{aligned} \quad (6.7.5)$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{E} &= i \frac{E\omega}{c} [\mathbf{n} \times (\mathbf{a}_1 + i\alpha\mathbf{a}_2)] e^{-i(kx)} = \\
&= i \frac{E\omega}{c} (\mathbf{a}_2 - i\alpha\mathbf{a}_1) e^{-i(kx)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\
\operatorname{rot} \mathbf{B} &= i \frac{E\omega}{c} [\mathbf{n} \times (\mathbf{a}_2 - i\alpha\mathbf{a}_1)] e^{-i(kx)} = \\
&= -i \frac{E\omega}{c} (\mathbf{a}_1 + i\alpha\mathbf{a}_2) e^{-i(kx)} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{6.7.6}$$

Таким образом, поля, определяемые соотношениями (6.7.3), удовлетворяют уравнениям (6.6.1) и описывают плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся в направлении \mathbf{n} .

Рассмотрим теперь, как преобразуется поле волны при переходе от одной системы отсчета к другой. Используя (6.5.9) и учитывая (6.7.4), получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_0 &= u^0 \mathbf{E} + [\mathbf{u} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]] - \frac{\mathbf{u}(\mathbf{uE})}{1 + u^0}, \\
\mathbf{B}_0 &= u^0 \mathbf{B} + [\mathbf{u} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{B}]] - \frac{\mathbf{u}(\mathbf{uB})}{1 + u^0},
\end{aligned} \tag{6.7.7}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_0 &= \mathbf{E}(u^0 - (\mathbf{un})) + \left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{u}}{1 + u^0} \right) (\mathbf{uE}), \\
\mathbf{B}_0 &= \mathbf{B}(u^0 - (\mathbf{un})) + \left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{u}}{1 + u^0} \right) (\mathbf{uB}),
\end{aligned} \tag{6.7.8}$$

то есть \mathbf{E} и \mathbf{B} преобразуются совершенно одинаково. Поэтому, как и следовало ожидать, подобно постоянному скрещенному полю, волна остается волной в любой системе отсчета, однако ее амплитуда и частота меняются.

Действительно, из (6.7.8) следует, что

$$\begin{aligned}
|\mathbf{E}_0| &= |\mathbf{E}|(u^0 - (\mathbf{un})) \\
|\mathbf{B}_0| &= |\mathbf{B}|(u^0 - (\mathbf{un})),
\end{aligned} \tag{6.7.9}$$

а (см. (A.2.3))

$$k_0^\mu = \left\{ u^0 k^0 - (\mathbf{u}\mathbf{k}), \mathbf{k} - \mathbf{u} \left(k^0 - \frac{(\mathbf{u}\mathbf{k})}{1 + u^0} \right) \right\} = \left\{ \frac{\omega_0}{c}, \frac{\omega_0}{c} \mathbf{n}_0 \right\}, \quad (6.7.10)$$

то есть

$$\omega_0 = \omega(u^0 - (\mathbf{u}\mathbf{n})). \quad (6.7.11)$$

Наиболее нагляден случай, когда система отсчета движется либо по направлению волны, либо навстречу ей. Тогда $u^0 = \gamma$, $(\mathbf{u}\mathbf{n}) = \pm\beta\gamma$. Откуда

$$|\mathbf{E}_0| = |\mathbf{E}| \sqrt{\frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}}, \quad |\mathbf{B}_0| = |\mathbf{B}| \sqrt{\frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}}, \quad \omega_0 = \omega \sqrt{\frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}}. \quad (6.7.12)$$

Таким образом, в системе отсчета, движущейся навстречу волне, амплитуды полей и частота волны увеличиваются пропорционально лоренц-фактору.

6.8 Отражение плоских волн от зеркала

Назовем зеркалом устройство, которое полностью отражает электромагнитную волну, причем в системе покоя зеркала справедливы положения геометрической оптики, то есть «угол падения равен углу отражения». Предположим, что зеркало неподвижно относительно системы отсчета \mathcal{K}' , которая движется относительно лабораторной системы отсчета \mathcal{K} со скоростью \mathbf{v} . Для определенности будем считать, что скорость \mathbf{v} параллельна общему направлению координатных осей x и x' . Пусть волна (луч света), имеющая частоту ω , распространяется в плоскости x, y под углом θ к оси x в системе отсчета \mathcal{K} . Выясним, как будет ориентирован отраженный от зеркала луч и какова будет частота отраженной волны. Так как направление и частота волны характеризуется волновым вектором (6.7.2),

то решение задачи сводится к последовательным преобразованиям Лоренца для волнового вектора из системы отсчета \mathcal{K} в систему отсчета \mathcal{K}' и обратно. Для наглядности проведем эти преобразования в явном виде.

Волновой вектор для избранной нами геометрии задачи записывается так:

$$k^\mu = \left\{ \frac{\omega}{c}, \frac{\omega}{c} \mathbf{n} \right\} = \{k^0, k_x, k_y, k_z\}. \quad (6.8.1)$$

$$k_x = k^0 \cos \theta, \quad k_y = k^0 \sin \theta, \quad k_z = 0; \quad \cos \theta \in [0, 1]. \quad (6.8.2)$$

Рассмотрим случай, когда плоскость зеркала перпендикулярна оси x' , поскольку очевидно, что если плоскость зеркала ориентирована параллельно ей, то результат будет тривиальным. Преобразование k^μ из системы \mathcal{K} в систему \mathcal{K}' имеет вид (см. (4.2.6))

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(k^0 - \beta k_x) \\ \gamma(k_x - \beta k^0) \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}. \quad (6.8.3)$$

После отражения от зеркала компонента k'_x изменяет знак. Обратное преобразование в систему \mathcal{K} дает

$$\begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(k^0 - \beta k_x) \\ -\gamma(k_x - \beta k^0) \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2((1 + \beta^2)k^0 - 2\beta k_x) \\ \gamma^2(2\beta k^0 - (1 + \beta^2)k_x) \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}. \quad (6.8.4)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} k'^0 &= \gamma(k^0 - \beta k_x), \\ k'_x &= \gamma(k_x - \beta k^0) = k'^0 \cos \theta' \\ k'_y &= k_y = k'^0 \sin \theta'. \end{aligned} \quad (6.8.5)$$

Подставляя в эти формулы (6.8.1), (6.8.2), мы фактически получаем формулу (6.7.11) для изменения частоты волны

$$\omega' = \omega \frac{1 - \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (6.8.6)$$

и формулу (3.8.7) для абберации света

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}. \quad (6.8.7)$$

Для отраженной волны компоненты волнового вектора имеют вид

$$\begin{aligned} k''^0 &= \gamma^2((1 + \beta^2)k^0 - 2\beta k_x), \\ k_x'' &= \gamma^2(2\beta k^0 - (1 + \beta^2)k_x) = k''^0 \cos \theta'', \\ k_y'' &= k_y = k''^0 \sin \theta''. \end{aligned} \quad (6.8.8)$$

Из (6.8.8) следует, что

$$\omega'' = \omega \frac{1 - 2\beta \cos \theta + \beta^2}{1 - \beta^2}, \quad (6.8.9)$$

$$\cos \theta_{ref} = -\cos \theta'' = \frac{(1 + \beta^2) \cos \theta - 2\beta}{1 - 2\beta \cos \theta + \beta^2}, \quad \theta_{ref} = \pi - \theta''. \quad (6.8.10)$$

Если зеркало приближается к источнику ($\beta < 0$), то с увеличением скорости частота отраженной волны монотонно растет пропорционально квадрату лоренц-фактора, а угол отражения $\theta_{ref} \rightarrow 0$ (см. Рис.6.1). Если же зеркало удаляется ($\beta > 0$), то ситуация становится гораздо более интересной. Как следует из формулы (6.8.7), если $\cos \theta < \beta$, то $\cos \theta'$ становится отрицательным, то есть волна падает на зеркало с тыльной стороны, на что уже указывалось в разделе 3.8. В этом нет ничего странного, так как полученные формулы справедливы в предположении, что зеркало движется в поле волны, которое существует сколь угодно долго. Если считать, что

зеркало двустороннее, то формулы (6.8.9) и (6.8.10) дают правильный результат: при увеличении скорости зеркала частота отраженного света растет пропорционально квадрату лоренц-фактора, а направление отраженной волны $\theta'' = \pi - \theta_{ref} \rightarrow 0$, то есть отраженный свет распространяется преимущественно в направлении движения зеркала (см. Рис.6.3). В случае $\cos \theta > \beta$ частота отраженной волны с ростом скорости зеркала уменьшается обратно пропорционально квадрату лоренц-фактора, а $\theta_{ref} > \theta \rightarrow 0$ (см. Рис.6.2).

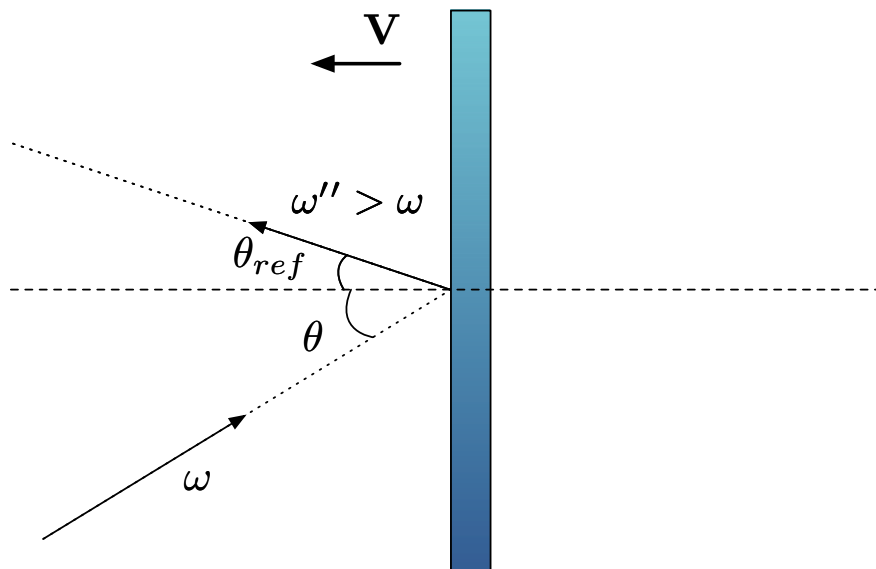


Рис. 6.1:

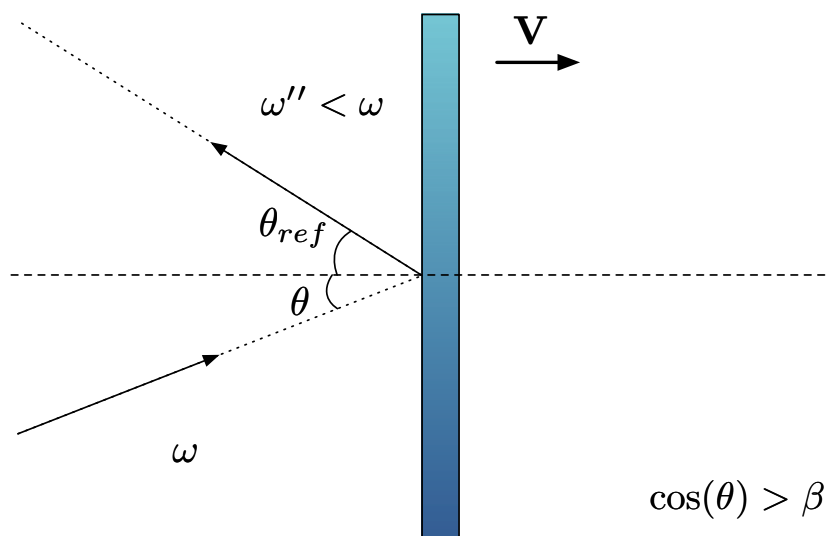


Рис. 6.2:

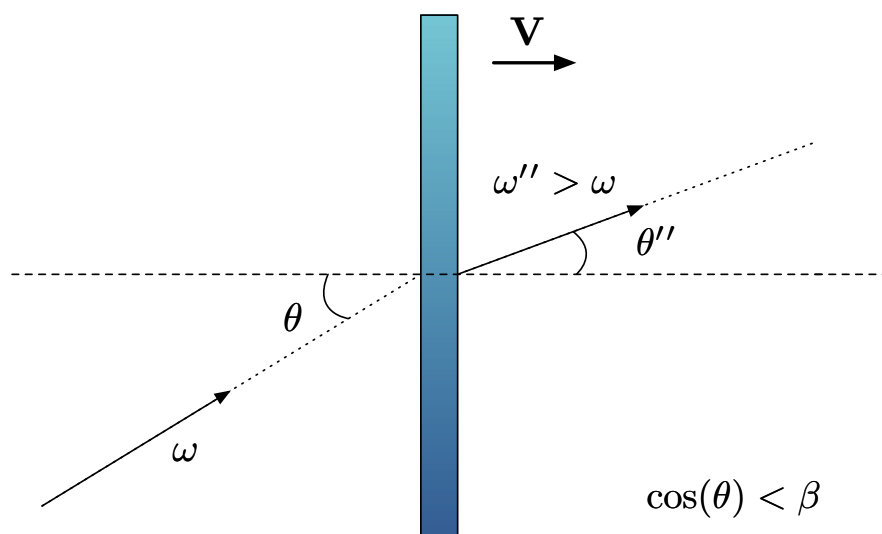


Рис. 6.3:

Если же рассматривается импульсный сигнал, то волна при $\cos \theta < \beta$ просто зеркало не догонит. Таким образом, отнюдь не все направленные электромагнитные сигналы от быстро удаляющихся источников достигнут наблюдателя (зеркала). Когда сигнал распространяется сферически сим-

метричным образом (например, при вспышке сверхновой звезды), то рано или поздно он до наблюдателя дойдет.

В частном случае, когда $\cos \theta = 0$, то есть когда волна распространяется параллельно поверхности зеркала, изменение частоты отраженной волны определяется формулой

$$\omega'' = \omega \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}. \quad (6.8.11)$$

При этом угол, который составляет отраженная волна с осью x , задается формулой

$$\cos \theta'' = \frac{2\beta}{1 + \beta^2}, \quad (6.8.12)$$

из которой следует, что при $\beta \rightarrow 1$ направление отраженной волны практически совпадает со скоростью зеркала.

Ясно, что рассмотренная задача имеет модельный характер. Действительно, как мы установили, частоты волн, приходящих на зеркало, могут быть как очень большими, так и очень маленькими. Реальные же зеркала хорошо работают только в оптическом диапазоне и его окрестностях.

6.9 Поле равномерно движущегося точечного заряда

Будем считать, что точечный заряд e находится в начале координат системы отсчета \mathcal{K}_0 , которая движется со скоростью $\mathbf{V} = V \mathbf{n}$ относительно инерциальной системы отсчета \mathcal{K} . Для определенности положим $\mathbf{n} \parallel \mathbf{e}_x$.

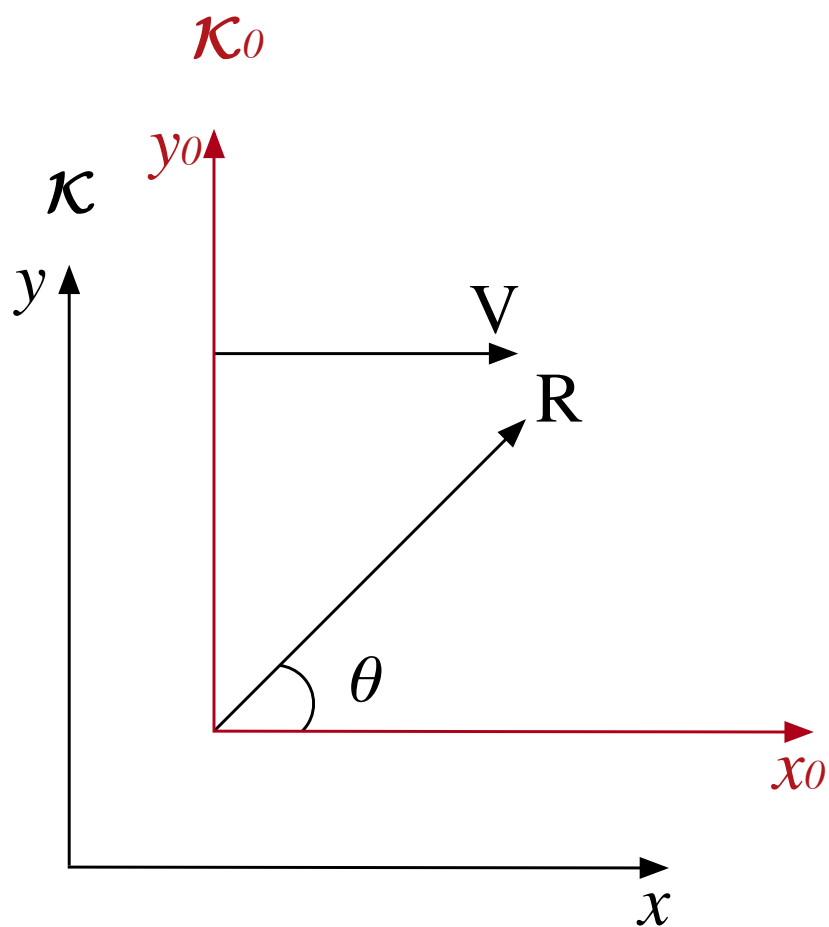


Рис. 6.4:

Используя формулы преобразования полей при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую (6.5.6), получаем

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel 0} + \gamma \mathbf{E}_{\perp 0}, \quad \mathbf{B} = \beta \gamma [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\perp 0}], \quad (6.9.1)$$

так как в системе \mathcal{K}_0 магнитное поле отсутствует ($\mathbf{B}_0 = 0$). Поскольку

$$\mathbf{E}_0 = e \frac{\mathbf{R}_0}{|\mathbf{R}_0|^3}, \quad \mathbf{R}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}, \quad (6.9.2)$$

то

$$\mathbf{E} = \left\{ e \frac{x_0}{|\mathbf{R}_0|^3}, e \frac{y_0}{|\mathbf{R}_0|^3} \gamma, e \frac{z_0}{|\mathbf{R}_0|^3} \gamma \right\}, \quad (6.9.3)$$

$$\mathbf{B} = \left\{ 0, -e \frac{z_0}{|\mathbf{R}_0|^3} \beta \gamma, e \frac{y_0}{|\mathbf{R}_0|^3} \beta \gamma \right\},$$

$$x_0 = (x - Vt) \gamma, \quad y_0 = y, \quad z_0 = z. \quad (6.9.4)$$

Введем вектор

$$\mathbf{R} = \{x - Vt, y, z\}, \quad (6.9.5)$$

характеризующий расстояние от заряда до точки наблюдения поля в системе \mathcal{K} . Отсюда

$$|\mathbf{R}_0| = \gamma \sqrt{(x - Vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)} = \gamma |\mathbf{R}| \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta}. \quad (6.9.6)$$

Здесь

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{y^2 + z^2}{|\mathbf{R}|^2}}, \quad (6.9.7)$$

где θ представляет собой угол между направлением скорости заряда и радиус-вектором \mathbf{R} . После очевидных преобразований получаем

$$\mathbf{E} = e \frac{\mathbf{R} (1 - \beta^2)}{|\mathbf{R}|^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}},$$

$$\mathbf{B} = e \frac{[\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{R}] (1 - \beta^2)}{|\mathbf{R}|^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}. \quad (6.9.8)$$

Частные случаи:

$$\mathbf{E}_{\parallel} = e \frac{\mathbf{R} (1 - \beta^2)}{|\mathbf{R}|^3}, \quad \mathbf{E}_{\perp} = e \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3 (1 - \beta^2)^{1/2}},$$

$$\mathbf{B}_{\parallel} = 0, \quad \mathbf{B}_{\perp} = e \frac{[\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{R}]}{|\mathbf{R}|^3 (1 - \beta^2)^{1/2}}. \quad (6.9.9)$$

Таким образом, поперечная компонента напряженности электрического поля растет пропорционально лоренц-фактору, а продольная уменьшается пропорционально его квадрату.

6.10 Единственность решений уравнений Максвелла

Пусть в фиксированной инерциальной системе отсчета заданы значения плотностей заряда и тока $\rho(\mathbf{R}, t)$, $\mathbf{j}(\mathbf{R}, t)$ всюду в некоторой области V для всех значений времени $t \geq 0$, а также начальные условия

$$\mathbf{E}(\mathbf{R} \in V, t = 0), \quad \mathbf{B}(\mathbf{R} \in V, t = 0). \quad (6.10.1)$$

Пусть также на границе данной области Γ_V для всех значений времени $t \geq 0$ задано граничное условие на одну из тангенциальных составляющих полей:

$$\text{либо } [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \Big|_{\Gamma_V}, \quad \text{либо } [\mathbf{n} \times \mathbf{B}] \Big|_{\Gamma_V}, \quad (6.10.2)$$

где \mathbf{n} — нормаль к границе области Γ_V . Тогда уравнения Максвелла имеют единственное решение $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{R}, t)$ для $t \geq 0$ всюду в области V . Докажем это утверждение.

Пусть существуют два решения $\mathbf{E}_1(\mathbf{R}, t)$, $\mathbf{B}_1(\mathbf{R}, t)$ и $\mathbf{E}_2(\mathbf{R}, t)$, $\mathbf{B}_2(\mathbf{R}, t)$. В силу линейности уравнений Максвелла разности этих решений

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_1(\mathbf{R}, t) - \mathbf{E}_2(\mathbf{R}, t), \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B}_1(\mathbf{R}, t) - \mathbf{B}_2(\mathbf{R}, t), \quad (6.10.3)$$

удовлетворяют уравнениям Максвелла без токов (см. (6.3.5)):

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B}' &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t}, \\ \text{rot } \mathbf{E}' &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t}, \end{aligned} \quad (6.10.4)$$

с нулевыми начальными и граничными условиями:

$$\mathbf{E}'(\mathbf{R} \in V, t = 0) = 0, \quad \mathbf{B}'(\mathbf{R} \in V, t = 0) = 0, \quad (6.10.5)$$

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}'] \Big|_{\Gamma_V} = 0, \quad \text{либо} \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{B}'] \Big|_{\Gamma_V} = 0. \quad (6.10.6)$$

Умножим уравнения (6.10.4) скалярно на \mathbf{E}' и \mathbf{B}' соответственно, и вычтем одно из другого. Имеем

$$(\mathbf{E}' \operatorname{rot} \mathbf{B}') - (\mathbf{B}' \operatorname{rot} \mathbf{E}') = \frac{1}{c} \left\{ \left(\mathbf{E}' \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} \right) + \left(\mathbf{B}' \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} \right) \right\}, \quad (6.10.7)$$

откуда следует

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \{ \mathbf{E}'^2 + \mathbf{B}'^2 \} = -c \operatorname{div} [\mathbf{E}' \times \mathbf{B}']. \quad (6.10.8)$$

Проинтегрируем (6.10.8) по области V :

$$\frac{1}{2} \int_V \frac{\partial}{\partial t} \{ \mathbf{E}'^2 + \mathbf{B}'^2 \} dV = -c \int_V \operatorname{div} [\mathbf{E}' \times \mathbf{B}'] dV. \quad (6.10.9)$$

Используя теорему Гаусса–Остроградского, получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V \{ \mathbf{E}'^2 + \mathbf{B}'^2 \} dV = -c \oint_{\Gamma_V} (\mathbf{n} [\mathbf{E}' \times \mathbf{B}']) dS. \quad (6.10.10)$$

Подынтегральное выражение в правой части (6.10.10)

$$(\mathbf{n} [\mathbf{E}' \times \mathbf{B}']) = (\mathbf{B}' [\mathbf{n} \times \mathbf{E}']) = -(\mathbf{E}' [\mathbf{n} \times \mathbf{B}']) \quad (6.10.11)$$

обращается в нуль в силу граничных условий (6.10.6). Таким образом, интеграл в левой части не зависит от времени. В силу начальных условий (6.10.5) он равен нулю при $t = 0$. А следовательно, равен нулю и при $t \geq 0$. Так как $\mathbf{E}'^2 + \mathbf{B}'^2$ неотрицательно, то $\mathbf{E}' = 0$, $\mathbf{B}' = 0$ для $\mathbf{R} \in V$ при $t \geq 0$. То есть решения $\mathbf{E}_1(\mathbf{R}, t)$, $\mathbf{B}_1(\mathbf{R}, t)$ и $\mathbf{E}_2(\mathbf{R}, t)$, $\mathbf{B}_2(\mathbf{R}, t)$ совпадают, что и требовалось доказать.

Как правило, доказательство теорем единственности в физике не требуется. При этом в ход идут рассуждения о принципе воспроизводимости результатов. Однако электромагнитное поле является дальнедействующим. Поэтому наличие полей может быть обусловлено источниками, которые находятся достаточно далеко. Действительно, в реальном экспери-

менте мы можем зафиксировать только источники, находящиеся в конечной области пространства. Система же уравнений Максвелла имеет нетривиальные решения даже в том случае, когда источники отсутствуют (то есть находятся на бесконечности). Мы знаем, что такие решения, в частности, могут иметь характер либо постоянных однородных полей, либо характер плоских волн. И если постоянные поля фиксируются начальными условиями (6.10.1), то для учета поля излучения мы должны ввести граничные условия (6.10.2). Как было показано, в плосковолновом поле напряженность электрического поля \mathbf{E} и магнитная индукция \mathbf{B} равны и ортогональны как к друг другу, так и к направлению распространения волны. Поэтому достаточно поставить граничные условия для одного из этих векторов, причем только на его тангенциальную компоненту. Следовательно, условия доказанной нами теоремы как раз и определяют типы экспериментов, в которых получаются тождественные результаты.

Глава 7

Волновое уравнение

7.1 Потенциалы электромагнитного поля

Будем искать решение системы уравнений Максвелла в виде

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (7.1.1)$$

Функции $A^\mu \equiv A^\mu(x)$ по построению образуют четырехмерный вектор, который называется 4-потенциалом электромагнитного поля. Его компоненты перечисляются следующим образом:

$$A^\mu = \{\varphi, \mathbf{A}\}, \quad (7.1.2)$$

причем, по традиции, φ называется скалярным потенциалом, а \mathbf{A} — векторным. Очевидно, что при пространственных вращениях φ ведет себя как скаляр, а \mathbf{A} — как трехмерный вектор. В явном виде зависимость полей от φ, \mathbf{A} записывается следующим образом:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (7.1.3)$$

Использование анзаца (7.1.1) приводит к тому, что уравнение

$$\partial_\nu \overset{*}{F}{}^{\mu\nu} = 0 \quad (7.1.4)$$

удовлетворяется тождественно. Действительно

$$e^{\mu\nu\rho\lambda}\partial_\nu\{A_\lambda - \partial_\lambda A_\rho\} = 0 \quad (7.1.5)$$

вследствие антисимметричности тензора $e^{\mu\nu\rho\lambda}$ и симметричности операторного тензора $\partial_\nu\partial_\lambda$. Подстановка (7.1.1) в уравнение

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c}j^\mu \quad (7.1.6)$$

дает

$$\partial_\nu\{\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\} = -\frac{4\pi}{c}j^\mu \Rightarrow \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) - (\partial_\nu\partial^\nu)A^\mu = -\frac{4\pi}{c}j^\mu. \quad (7.1.7)$$

Если ввести оператор д'Аламбера

$$\square = (\partial_\nu\partial^\nu) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad (7.1.8)$$

где Δ — оператор Лапласа, то мы получаем волновое уравнение

$$\square A^\mu - \partial^\mu(\partial^\nu A_\nu) = \frac{4\pi}{c}j^\mu. \quad (7.1.9)$$

Процедура введения четырехмерного потенциала неоднозначна. Тензор поля не изменяется, если произвести замену

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x_\mu}, \quad (7.1.10)$$

где $f(x)$ — произвольная дважды дифференцируемая функция координат пространства событий. Поэтому на $A^\mu(x)$ можно наложить дополнительное условие, которое, как говорят, определяет калибровку потенциала. Естественно в качестве такого дополнительного условия выбрать инвариантное относительно выбора системы отсчета условие Лоренца:

$$(\partial^\nu A_\nu) = 0, \quad (7.1.11)$$

сокращающее количество независимых $A^\mu(x)$ компонент до трех. В такой калибровке волновое уравнение приобретает вид

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c}j^\mu. \quad (7.1.12)$$

7.2 Решения волнового уравнения без токов

Решения волнового уравнения в случае, когда $j^\mu(x) = 0$, вполне очевидны. Во-первых, уравнению (7.1.12) удовлетворяет любая линейная комбинация координат пространства событий. Ясно, что такое решение отвечает случаю постоянных однородных полей. Во-вторых, уравнение (7.1.12) с нулевой правой частью имеет решение

$$A^\mu(x) = \int a_+^\mu(k) e^{i(kx)} \delta(k^2) \theta(k^0) d^4k + \int a_-^\mu(k) e^{-i(kx)} \delta(k^2) \theta(k^0) d^4k, \quad (7.2.1)$$

где $a_\pm^\mu(k)$ — функции 4-импульса. В этом можно убедиться, подставив (7.2.1) в (7.1.12). Чтобы (7.2.1) удовлетворяло условию Лоренца (7.1.11), необходимо положить $k_\mu a_\pm^\mu(k) = 0$. Это решение описывает волновые поля произвольного спектрального состава. В частном случае оно описывает монохроматические плоские волны (см. (6.7.3)). Еще раз подчеркнем, что наличие нетривиальных решений у однородного волнового уравнения заставляет накладывать граничные условия в теореме о единственности решений для уравнений Максвелла.

Отметим, что соотношение (7.2.1) представляет собой весьма сложную конструкцию. Даже в том случае, когда оно описывает плосковолновое решение, у которого оба инварианта равны нулю (то есть $\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2 = 0$ и $(\mathbf{B}\mathbf{E}) = 0$), структура полей, определяемых этим решением, может быть весьма причудливой. В качестве примера можно указать так называемый «хопфион»¹.

¹A.F. Ronada, *Lett. Math. Phys.*, **18**, 97, (1989); *J. Phys. A: Math. Gen.*, **23**, L815, (1990).

7.3 Функция Грина волнового уравнения

Для получения решения уравнения (7.1.12) с отличной от нуля правой частью, найдем его функцию Грина $G(x - y)$. Функция Грина удовлетворяет уравнению

$$\square_x G(x - y) = \delta^4(x - y). \quad (7.3.1)$$

Найдем его решение с помощью преобразования Фурье.

$$G(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int G(k) e^{-i(k(x-y))} d^4k, \quad (7.3.2)$$

$$\delta^4(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-i(k(x-y))} d^4k. \quad (7.3.3)$$

Подставляя (7.3.2), (7.3.3) в (7.3.1), получаем фурье-образ

$$G(k) = -\frac{1}{k^2} \equiv -\frac{1}{(k^0)^2 - \mathbf{k}^2}. \quad (7.3.4)$$

Полученное выражение имеет особенности в точках

$$k^0 = \pm |\mathbf{k}|, \quad (7.3.5)$$

поэтому выражение для функции Грина определено с точностью до решения однородного уравнения вида (7.2.1). Таким образом, фурье-образ функции Грина может отличаться от (7.3.4) на

$$G_0(k) = \delta(k^2) f_0(k), \quad (7.3.6)$$

где $f_0(k)$ — функция без особенностей.

Перейдем в комплексную плоскость переменной k^0 . Тогда, выбирая тот или иной путь обхода полюсов, функцию Грина можно задать однозначно.

Рассмотрим запаздывающую функцию Грина

$$G_R(x - y) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-i(k(x-y))}}{(k^0)^2 - \mathbf{k}^2} d^4k, \quad (7.3.7)$$

для которой контур интегрирования по переменной k^0 обходит полюсы (7.3.5) сверху. Если $x^0 - y^0 < 0$, то мы можем дополнить контур интегрирования дугой бесконечного радиуса, лежащей в верхней полуплоскости. Интеграл по этой дуге равен нулю в силу леммы Жордана. Так как внутри образовавшегося замкнутого контура особенности подынтегрального выражения отсутствуют, то в этом случае $G_R(x - y)$ равна нулю.

Если $x^0 - y^0 > 0$, то контур интегрирования можно дополнить дугой, лежащей в нижней полуплоскости. Интеграл определяется суммой вычетов в точках $k^0 = \pm|\mathbf{k}|$, которые обходятся в отрицательном направлении. Так как

$$\frac{1}{(k^0)^2 - \mathbf{k}^2} = \frac{1}{2|\mathbf{k}|} \left(\frac{1}{k^0 - |\mathbf{k}|} - \frac{1}{k^0 + |\mathbf{k}|} \right), \quad (7.3.8)$$

то

$$\begin{aligned} G_R(x - y) &= \theta(x^0 - y^0) \frac{2\pi i}{(2\pi)^4} \int \frac{d\mathbf{k}}{2|\mathbf{k}|} \times \\ &\times \left\{ e^{-i|\mathbf{k}|(x^0 - y^0) + i(\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{y}))} - e^{+i|\mathbf{k}|(x^0 - y^0) + i(\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{y}))} \right\}. \end{aligned} \quad (7.3.9)$$

Перейдем к сферическим координатам

$$d\mathbf{k} = k^2 dk \sin \vartheta d\vartheta d\phi, \quad (\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{y})) = k|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \cos \vartheta.$$

Интегрирование по ϕ тривиально. Замена переменной интегрирования $t = -\cos \vartheta$ дает

$$\begin{aligned} G_R(x - y) &= \theta(x^0 - y^0) \frac{i}{8\pi^2} \int_0^\infty k dk \int_{-1}^1 dt \times \\ &\times \left\{ e^{-ik((x^0 - y^0) + t|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)} - e^{+ik((x^0 - y^0) - t|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)} \right\}. \end{aligned} \quad (7.3.10)$$

После интегрирования по t имеем

$$G_R(x - y) = \theta(x^0 - y^0) \frac{1}{8\pi^2 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \int_0^\infty dk \times \left\{ -e^{-ik((x^0 - y^0) + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)} + e^{+ik((x^0 - y^0) - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)} + e^{-ik((x^0 - y^0) - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)} - e^{+ik((x^0 - y^0) + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)} \right\}. \quad (7.3.11)$$

В формуле (7.3.11) можно перейти к интегрированию по всей оси переменной k :

$$G_R(x - y) = \frac{\theta(x^0 - y^0)}{8\pi^2 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \int_{-\infty}^\infty dk \left\{ e^{ik((x^0 - y^0) - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)} - e^{ik((x^0 - y^0) + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)} \right\}, \quad (7.3.12)$$

откуда следует

$$G_R(x - y) = \frac{\theta(x^0 - y^0)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \left\{ \delta((x^0 - y^0) - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) - \delta((x^0 - y^0) + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \right\}. \quad (7.3.13)$$

Так как

$$\begin{aligned} \theta(x^0 - y^0) \delta((x^0 - y^0) + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) &\equiv 0, \\ \theta(x^0 - y^0) \delta((x^0 - y^0) - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) &\equiv \delta((x^0 - y^0) - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|), \end{aligned} \quad (7.3.14)$$

то

$$G_R(x - y) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \delta((x^0 - y^0) - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|). \quad (7.3.15)$$

Выражение для функции Грина (7.3.15) не является явно лоренц-инвариантным. Однако в силу (7.3.14) мы можем в (7.3.13) изменить знак перед вторым членом в скобках и воспользоваться формулой

$$\frac{1}{2|a|} \left\{ \delta(x - a) + \delta(x + a) \right\} = \delta(x^2 - a^2), \quad (7.3.16)$$

которая является частным случаем общего соотношения

$$\delta(f(x)) = \sum_i \left| \frac{df(x)}{dx} \right|^{-1} \delta(x - x_i). \quad (7.3.17)$$

Здесь x_i — корни уравнения $f(x) = 0$.

Окончательно,

$$G_R(x - y) = \frac{1}{2\pi} \theta(x^0 - y^0) \delta((x - y)^2). \quad (7.3.18)$$

Соотношение (7.3.18) показывает, что функция Грина инвариантна относительно преобразований ортохронной группы Лоренца, как и следовало ожидать. Очевидно, что используя запаздывающую функцию Грина, решение уравнения (7.1.12) можно записать в виде

$$A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} \int G_R(x - y) j^\mu(y) d^4y. \quad (7.3.19)$$

Полученную формулу необходимо прокомментировать. Общее решение волнового уравнения (7.1.12) есть сумма решения (7.3.19) и общего решения однородного уравнения. Решение однородного уравнения можно выбрать так, чтобы оно удовлетворяло тем или иным начальным и граничным условиям. Переменная x^0 фиксирует время наблюдения полей, созданных источниками в момент времени y^0 . Запаздывающая функция Грина отлична от нуля только если $x^0 - y^0 > 0$. То есть поля, описываемые потенциалом (7.3.19), отвечают тривиальным граничным условиям на бесконечно удаленной поверхности².

²Нахождению решений волнового уравнения с нетривиальными граничными условиями на заданных поверхностях посвящена обширнейшая литература. Основы теории прекрасно изложены в книге: В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, М., Наука (1981). Специально для студентов филиала МГУ в городе Баку написан учебник: А. В. Звягин, *Лекции по уравнениям математической физики*, Баку, Издательство филиала МГУ в г. Баку (2013).

7.4 Неподвижный точечный заряд

Рассмотрим неподвижный точечный заряд, находящийся в точке \mathbf{x}_0 . Плотность тока определяется формулами

$$j^0(y) = ce\delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0), \quad \mathbf{j}(y) = 0. \quad (7.4.1)$$

Из (7.3.19) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x) &= 0, \\ \varphi(x) &= e \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \left\{ \delta((x^0 - y^0) - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \right\} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) d^4y. \end{aligned} \quad (7.4.2)$$

После элементарных вычислений имеем выражения для потенциала

$$\varphi(x) = \frac{e}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}, \quad (7.4.3)$$

и напряженности электрического поля

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = e \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}. \quad (7.4.4)$$

Таким образом, мы получили, как и следовало ожидать, поле, описываемое законом Кулона.

7.5 Равномерно заряженный шар

Рассмотрим равномерно заряженный шар с центром в начале координат (см. раздел 6.4). Плотность тока определяется формулами

$$j^0(y) = c\rho_0\theta(R_0 - |\mathbf{y}|), \quad \mathbf{j}(y) = 0, \quad q = \rho_0 \frac{4\pi}{3} R_0^3. \quad (7.5.1)$$

Из (7.3.19) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x) &= 0, \\ \varphi(x) &= \rho_0 \int \frac{\theta(R_0 - |\mathbf{y}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \left\{ \delta((x^0 - y^0) - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \right\} d^4y = \\ &= \rho_0 \int \frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \theta(R_0 - |\mathbf{y}|). \end{aligned} \quad (7.5.2)$$

Перейдем к сферическим координатам. Тогда

$$d\mathbf{y} = y^2 dy \sin \vartheta d\vartheta d\phi, \quad (7.5.3)$$

и

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{R^2 + y^2 - 2Ry \cos \vartheta}, \quad (7.5.4)$$

где $R = |\mathbf{x}|$. Введем переменную $t = -\cos \vartheta$. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 2\pi\rho_0 \int_0^\infty y^2 \theta(R_0 - y) dy \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{R^2 + y^2 + 2tRy}} = \\ &= \frac{2\pi\rho_0}{R} \int_0^{R_0} \{|R + y| - |R - y|\} y dy, \end{aligned} \quad (7.5.5)$$

так как

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{R^2 + y^2 + 2tyR}} &= \frac{1}{Ry} \sqrt{R^2 + y^2 + 2tyR} \Big|_{-1}^1 = \\ &= \frac{1}{Ry} \{|R + y| - |R - y|\}. \end{aligned} \quad (7.5.6)$$

Пусть $R > R_0$. Тогда $|R - y| = R - y$ и

$$\varphi(x) = \frac{4\pi\rho_0}{R} \int_0^{R_0} y^2 dy = \rho_0 \frac{4\pi}{3} R_0^3 \frac{1}{R} = \frac{q}{R}. \quad (7.5.7)$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = q \frac{\mathbf{x}}{R^3}. \quad (7.5.8)$$

Пусть $R < R_0$. Тогда $|R - y| = R - y$, если $y < R$, и $|R - y| = y - R$, если $y > R$. Поэтому

$$\varphi(x) = \frac{4\pi\rho_0}{R} \left\{ \int_0^R y^2 dy + \int_R^{R_0} Ry dy \right\} = \rho_0 \frac{4\pi}{6} \{3R_0^2 - R^2\} = \frac{q}{2} \left\{ \frac{3}{R_0} - \frac{R^2}{R_0^3} \right\}. \quad (7.5.9)$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = q \frac{\mathbf{x}}{R_0^3}. \quad (7.5.10)$$

Поведение модуля напряженности электрического поля и скалярного потенциала как функций расстояния от центра шара приведено на Рис. 7.1 и Рис. 7.2 соответственно.

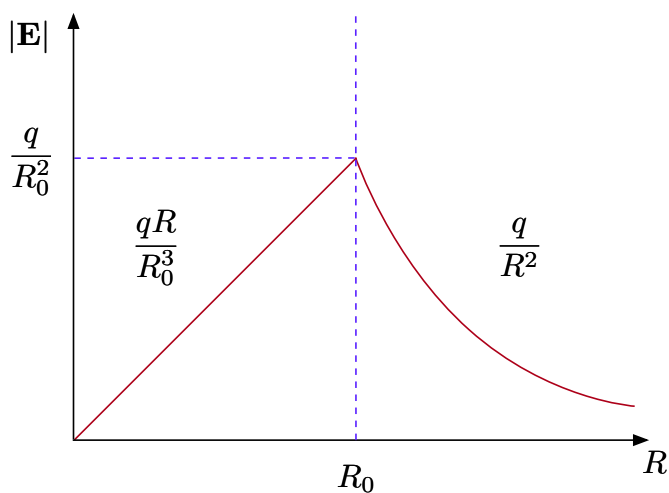


Рис. 7.1:

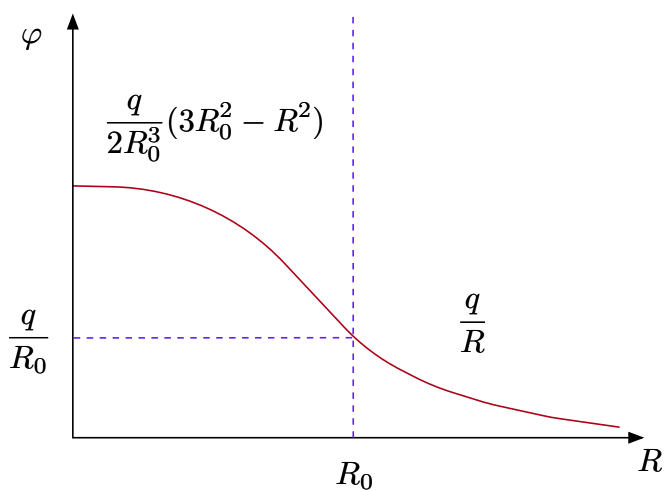


Рис. 7.2:

7.6 Прямой бесконечно длинный провод

Рассмотрим прямой бесконечно длинный провод, по которому течет постоянный ток I , равномерно распределенный в толще провода (см. раздел 6.4). Будем считать, что провод ориентирован вдоль оси z , радиус провода R_0 , а расстояние от оси провода до точки наблюдения равно R . Тогда плотность тока определяется формулами

$$j^0(y) = j^1(y) = j^2(y) = 0, \quad j^3(y) = j_0 \theta(R_0 - \varrho), \quad I = j_0 \pi R_0^2. \quad (7.6.1)$$

Используя формулу (7.3.19), имеем

$$A^0(x) = A^1(x) = A^2(x) = 0, \quad A^3(x) \equiv A_z(x), \quad (7.6.2)$$

причем

$$\begin{aligned} A_z(x) &= \frac{j_0}{c} \int \frac{\theta(R_0 - \varrho)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \left\{ \delta((x^0 - y^0) - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \right\} d^4 y = \\ &= \frac{j_0}{c} \int \frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \theta(R_0 - \varrho). \end{aligned} \quad (7.6.3)$$

Здесь ϱ — расстояние от оси провода.

Вычислим интеграл (7.6.3), перейдя к цилиндрическим координатам ϱ, ϕ, z :

$$\begin{aligned} d\mathbf{y} &= \varrho d\varrho d\phi dz, \quad |\mathbf{y}| = \sqrt{\varrho^2 + z^2}, \quad |\mathbf{x}| = \sqrt{R^2 + Z^2}, \\ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| &= \sqrt{\varrho^2 + R^2 - 2\varrho R \cos \phi + (z - Z)^2}. \end{aligned} \quad (7.6.4)$$

Таким образом,

$$A_z(x) = \frac{j_0}{c} \int \frac{\varrho d\varrho d\phi \theta(R_0 - \varrho) dz}{\sqrt{\varrho^2 + R^2 - 2\varrho R \cos \phi + (z - Z)^2}}. \quad (7.6.5)$$

Интеграл (7.6.5) расходится, так как при больших значениях переменной z подынтегральное выражение убывает линейно. Это вполне естественно, так как бесконечно длинных проводников не бывает. Однако потенциал определен неоднозначно. Наблюдаемыми величинами являются

только поля, которые выражаются через производные от потенциалов. Поэтому поступим следующим образом. Ограничим интегрирование по z : $z \in [-Z_0, Z_0]$, где Z_0 — достаточно большое положительное число. Поскольку результат не может зависеть от величины произвольного параметра Z_0 , то единственный существенный параметр задачи — это R . Поэтому рассмотрим только производную

$$\frac{\partial A_z(x)}{\partial R} \equiv \frac{\partial A_z(x, Z_0)}{\partial R} \Big|_{Z_0 \rightarrow \infty}. \quad (7.6.6)$$

Заменяя переменную интегрирования $z - Z \rightarrow z$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_z(x)}{\partial R} &= \frac{j_0}{c} \int_0^{R_0} \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\varrho \cos \phi - R}{(\varrho^2 + R^2 - 2\varrho R \cos \phi + z^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{j_0}{c} \int_0^{R_0} \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\varrho \cos \phi - R}{\varrho^2 + R^2 - 2\varrho R \cos \phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(1 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (7.6.7)$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(1 + z^2)^{3/2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{th} t \Big|_{-\infty}^{\infty} = 2,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_z(x)}{\partial R} &= \frac{j_0}{cR} \int_0^{R_0} \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\phi \left\{ \frac{\varrho^2 - R^2}{\varrho^2 + R^2 - 2\varrho R \cos \phi} - 1 \right\} = \\ &= \frac{j_0}{c} \left\{ \int_0^{R_0} d\varrho \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\varrho(\varrho^2 - R^2)}{R(\varrho^2 + R^2 - 2\varrho R \cos \phi)} - \pi \frac{R_0^2}{R} \right\}. \end{aligned} \quad (7.6.8)$$

Рассмотрим интеграл

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\varrho^2 + R^2 - 2\varrho R \cos \phi} = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi / \varrho R}{(\varrho^2 + R^2) / \varrho R - e^{i\phi} - e^{-i\phi}}.$$

Заменой переменной интегрирования

$$e^{i\phi} = s, \quad ie^{i\phi} d\phi = ds$$

он приводится к виду

$$J = \frac{i}{\varrho R} \oint_C \frac{ds}{s^2 - as + 1}, \quad a = \frac{\varrho}{R} + \frac{R}{\varrho}.$$

Интегрирование ведется по контуру C , который представляет собой единичную окружность с центром в начале координат комплексной плоскости переменной s . Вычислим этот интеграл, используя теорию вычетов. Корни знаменателя находим по теореме Виета:

$$s_+ = \frac{R}{\varrho}, \quad s_- = \frac{\varrho}{R}.$$

Поэтому

$$J = \frac{i}{R^2 - \varrho^2} \oint_C ds \left\{ \frac{1}{s - R/\varrho} - \frac{1}{s - \varrho/R} \right\} = \frac{2\pi}{R^2 - \varrho^2} \{ \theta(R - \varrho) - \theta(\varrho - R) \}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial A_z(x)}{\partial R} = \frac{2\pi j_0}{cR} \left\{ \int_0^{R_0} \varrho \{ \theta(\varrho - R) - \theta(R - \varrho) \} d\varrho - \frac{R_0^2}{2} \right\}. \quad (7.6.9)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial A_z(x)}{\partial R} = -\frac{2\pi j_0}{cR} \left\{ \int_0^{R_0} \varrho d\varrho + \frac{R_0^2}{2} \right\} = -\frac{2\pi j_0 R_0^2}{cR} = -\frac{2I}{cR}, \quad (7.6.10)$$

если $R > R_0$, и

$$\frac{\partial A_z(x)}{\partial R} = -\frac{2\pi j_0}{cR} \left\{ \int_0^R \varrho d\varrho - \int_R^{R_0} \varrho d\varrho + \frac{R_0^2}{2} \right\} = -\frac{2\pi j_0 R}{c} = -\frac{2IR}{cR_0^2}. \quad (7.6.11)$$

если $R < R_0$.

Так как $\varphi = 0$, а A_z не зависит от времени, то электрическое поле отсутствует. Магнитная же индукция, связанная с потенциалом соотношением $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, имеет только угловую составляющую, которая определяется формулой

$$B_\phi = -\frac{\partial A_z}{\partial R}. \quad (7.6.12)$$

Следовательно,

$$B_\phi = \frac{2I}{cR}, \quad R > R_0; \quad B_\phi = \frac{2IR}{cR_0^2}, \quad R < R_0. \quad (7.6.13)$$

Приведенный расчет показывает, что, как было установлено ранее при использовании симметричных соображений, силовые линии магнитного поля представляют собой концентрические окружности с центром на оси провода, лежащие в перпендикулярной ему плоскости. Поведение модуля магнитной индукции как функции расстояния от оси провода приведено на Рис. 7.3.

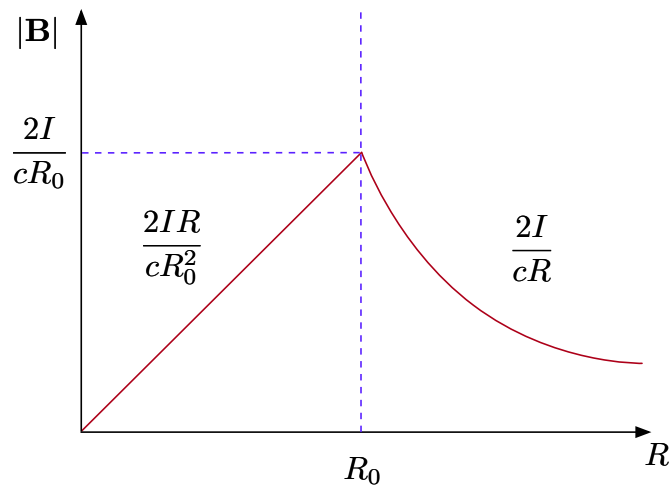


Рис. 7.3:

7.7 Равномерно движущийся точечный заряд

Исследуем теперь поле точечного заряда e , который движется с постоянной скоростью \mathbf{V} . Используя обозначение $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{V}/c = \text{const}$, компоненты 4-вектора тока $j^\mu(y) = \{j^0(y), \mathbf{j}(y)\}$ можно представить в виде

$$j^0(y) = ce\delta^3(\mathbf{y} - \boldsymbol{\beta}y^0), \quad \mathbf{j}(y) = ce\boldsymbol{\beta}\delta^3(\mathbf{y} - \boldsymbol{\beta}y^0). \quad (7.7.1)$$

Подставляя (7.7.1) в формулу (7.3.19)

$$A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} \int G_R(x - y)j^\mu(y)d^4y,$$

и учитывая, что

$$G_R(x - y) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \delta((x^0 - y^0) - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|),$$

после интегрирования по пространственным переменным получаем

$$\{\varphi(x), \mathbf{A}(x)\} = e\{1, \boldsymbol{\beta}\} \int \frac{dy^0}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\beta}y^0|} \delta(x^0 - y^0 - |\mathbf{x} - \boldsymbol{\beta}y^0|). \quad (7.7.2)$$

Поскольку

$$|\mathbf{x} - \boldsymbol{\beta}y^0| = \sqrt{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\beta}y^0)^2} = \sqrt{|\mathbf{x}|^2 + \beta^2(y^0)^2 - 2(\mathbf{x}\boldsymbol{\beta})y^0}, \quad (7.7.3)$$

то производная аргумента δ -функции по y^0

$$\begin{aligned} D &= -1 + \frac{((\mathbf{x} - \boldsymbol{\beta}y^0)\boldsymbol{\beta})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\beta}y^0|} = \frac{(\mathbf{x}\boldsymbol{\beta}) - \beta^2y^0 - |\mathbf{x} - \boldsymbol{\beta}y^0|}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\beta}y^0|} = \\ &= \frac{(\mathbf{x}\boldsymbol{\beta}) - x^0 + (1 - \beta^2)y^0}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\beta}y^0|}, \end{aligned} \quad (7.7.4)$$

так как $x^0 - y^0 = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\beta}y^0|$. Очевидно, что

$$x^0 - y^0 = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\beta}y^0| \Rightarrow (x^0 - y^0)^2 = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\beta}y^0)^2.$$

Следовательно, уравнение для нахождения явной зависимости y^0 от x^0 , \mathbf{x} имеет вид

$$(y^0)^2(1 - \beta^2) - 2y^0(x^0 - (\mathbf{x}\boldsymbol{\beta})) + ((x^0)^2 - \mathbf{x}^2) = 0. \quad (7.7.5)$$

Его решение

$$y^0 = \frac{1}{1 - \beta^2} \left\{ x^0 - (\mathbf{x}\boldsymbol{\beta}) \pm \sqrt{(x^0 - (\mathbf{x}\boldsymbol{\beta}))^2 - (1 - \beta^2)((x^0)^2 - \mathbf{x}^2)} \right\}. \quad (7.7.6)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \boldsymbol{\beta}y^0| &= x^0 - y^0 = \\ &= \frac{1}{1 - \beta^2} \left\{ (\mathbf{x}\boldsymbol{\beta}) - x^0\beta^2 \mp \sqrt{(x^0 - (\mathbf{x}\boldsymbol{\beta}))^2 - (1 - \beta^2)((x^0)^2 - \mathbf{x}^2)} \right\}. \end{aligned} \quad (7.7.7)$$

Выражение, стоящее под корнем в (7.7.7), можно представить в виде

$$Z = (x^0 - (\mathbf{x}\boldsymbol{\beta}))^2 - (1 - \beta^2)((x^0)^2 - \mathbf{x}^2) \equiv (\mathbf{x} - \boldsymbol{\beta}x^0)^2 - (\beta^2\mathbf{x}^2 - (\boldsymbol{\beta}\mathbf{x})^2).$$

Введем

$$\mathbf{R} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\beta}x^0 = \mathbf{R}_{\parallel} + \mathbf{R}_{\perp}, \quad (7.7.8)$$

причем

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\parallel} &= \frac{1}{\beta^2}(\mathbf{R}\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\beta^2}((\mathbf{x}\boldsymbol{\beta}) - \beta^2x^0)\boldsymbol{\beta}, \\ \mathbf{R}_{\perp} &= \mathbf{R} - \mathbf{R}_{\parallel} = \mathbf{x} - \frac{1}{\beta^2}(\mathbf{x}\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}. \end{aligned} \quad (7.7.9)$$

Тогда

$$Z = \mathbf{R}^2 - \beta^2\mathbf{R}_{\perp}^2 \equiv (1 - \beta^2)\mathbf{R}^2 + \beta^2\mathbf{R}_{\parallel}^2 = (1 - \beta^2)\mathbf{R}^2 + ((\mathbf{x}\boldsymbol{\beta}) - x^0\beta^2)^2. \quad (7.7.10)$$

Из (7.7.10) следует, что в (7.7.7) необходимо выбрать нижний знак перед корнем, чтобы $x^0 - y^0 > 0$. Учитывая (7.7.4), после интегрирования по y^0 с использованием формулы (7.3.17), получаем

$$\{\varphi(x), \mathbf{A}(x)\} = e^{-\frac{\{1, \boldsymbol{\beta}\}}{\sqrt{\mathbf{R}^2 - \beta^2\mathbf{R}_{\perp}^2}}}. \quad (7.7.11)$$

Для полей имеем

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = e \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \mathbf{R}_\perp^2 / \mathbf{R}^2)^{3/2}}, \quad (7.7.12)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = e \frac{[\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{R}]}{|\mathbf{R}|^3} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \mathbf{R}_\perp^2 / \mathbf{R}^2)^{3/2}}. \quad (7.7.13)$$

Естественно, (7.7.12), (7.7.13) совпадают с выражениями, полученными ранее с помощью преобразования Лоренца (см. (6.9.8)).

7.8 Произвольно движущийся точечный заряд

Исследуем теперь поле точечного заряда e , который движется с переменной скоростью $\mathbf{v}(y)$, то есть

$$j^0(y) = ce\delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0(y^0)), \quad \mathbf{j}(y) = ce\boldsymbol{\beta}(y^0)\delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0(y^0)). \quad (7.8.1)$$

Из (7.8.1) следует, что

$$A^\mu(x) = e \int \frac{dy^\mu}{dy^0} \frac{d^4y}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0(y^0)) \delta(x^0 - y^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|). \quad (7.8.2)$$

После интегрирования по пространственным переменным получаем

$$A^\mu(x) = e \int \frac{dx_0^\mu(y^0)}{dy^0} \frac{dy^0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(y^0)|} \delta(x^0 - y^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(y^0)|), \quad (7.8.3)$$

где

$$\frac{dx_0^\mu(y^0)}{dy^0} = \{1, \boldsymbol{\beta}(y^0)\}, \quad \boldsymbol{\beta}(y^0) = \frac{d\mathbf{x}_0(y^0)}{dy^0}. \quad (7.8.4)$$

Поэтому

$$\{\varphi(x), \mathbf{A}(x)\} = e \int \frac{dy^0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(y^0)|} \delta(x^0 - y^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(y^0)|) \{1, \boldsymbol{\beta}(y^0)\}. \quad (7.8.5)$$

В этих формулах y^0 имеет смысл (с точностью до коэффициента c) времени заряда, то есть источника поля. Если ввести обозначение $\mathbf{R}(y^0) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(y^0)$, то расстояние от частицы до точки наблюдения $R(y^0) = |\mathbf{R}(y^0)| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(y^0)|$. Используя это обозначение, получаем

$$\{\varphi(x), \mathbf{A}(x)\} = e \int \frac{dy^0}{R(y^0)} \delta(x^0 - y^0 - R(y^0)) \{1, \boldsymbol{\beta}(y^0)\}. \quad (7.8.6)$$

Уравнение

$$x^0 = y^0 + R(y^0) \quad (7.8.7)$$

имеет только одно решение $y^0 = y_0^0$. Действительно, поле в точке наблюдения \mathbf{x} в момент времени $t = x^0/c$ определяется состоянием заряда в предшествующий момент времени $t' = y^0/c$, причем время распространения поля

$$t - t' = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(y^0)|/c = R(y^0)/c, \quad (7.8.8)$$

откуда, вообще говоря, и следует (7.8.7). Очевидно, что в один и тот же момент времени t не могут детектироваться поля, определяемые состоянием заряда в разные моменты времени t' (при условии $x^0 - y^0 > 0$!), так как скорость частицы всегда меньше скорости света.

Следовательно,

$$\{\varphi(x), \mathbf{A}(x)\} = e \int \frac{\{1, \boldsymbol{\beta}(y^0)\}}{R(y^0)} \delta(y^0 - y_0^0) \left[\frac{\partial}{\partial y^0} (y^0 + R(y^0)) \right]^{-1} dy^0. \quad (7.8.9)$$

Поскольку

$$R(y^0) = ((x^1 - x_0^1(y^0))^2 + (x^2 - x_0^2(y^0))^2 + (x^3 - x_0^3(y^0))^2)^{1/2}, \quad (7.8.10)$$

то

$$\frac{\partial}{\partial y^0} (y^0 + R(y^0)) = 1 - \frac{(\mathbf{R}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0))}{R(y^0)} = 1 - (\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0)), \quad (7.8.11)$$

где $\mathbf{n}(y^0)$ — единичный вектор, направленный из точки нахождения частицы в точку наблюдения. Поэтому

$$\{\varphi(x), \mathbf{A}(x)\} = \frac{e\{1, \boldsymbol{\beta}(y^0)\}}{R(y^0)(1 - (\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0)))}. \quad (7.8.12)$$

Это выражение определяет так называемые потенциалы Лиенара–Вихерта. В формуле (7.8.12) мы убрали нижний индекс у аргумента y^0 , то есть здесь и в дальнейшем $y^0 \equiv y^0_0$ — решение уравнения (7.8.7).

Напряженности полей получим, используя (7.1.3), то есть

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^0}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Потенциалы Лиенара–Вихерта зависят от x^μ как явно, так и неявно (через переменную y^0). Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial y^0} \text{grad } y^0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y^0} \frac{\partial y^0}{\partial x^0}, \\ \mathbf{B} &= \text{rot } \mathbf{A} - \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y^0} \times \text{grad } y^0 \right]. \end{aligned} \quad (7.8.13)$$

Из соотношения (7.8.7) $x^0 = y^0 + R(y^0)$ следует

$$dx^0 = dy^0 \left(1 + \frac{\partial R(y^0)}{\partial y^0} \right) = dy^0 (1 - (\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0))). \quad (7.8.14)$$

Поэтому

$$\frac{\partial y^0}{\partial x^0} = \frac{1}{1 - (\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0))}. \quad (7.8.15)$$

Также из соотношения (7.8.7) следует

$$\text{grad } y^0 \left(1 + \frac{\partial R(y^0)}{\partial y^0} \right) + \text{grad } R(y^0) = 0, \quad (7.8.16)$$

то есть

$$\text{grad } y^0 = -\frac{\text{grad } R(y^0)}{1 - (\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0))} = -\frac{\mathbf{n}(y^0)}{1 - (\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0))}. \quad (7.8.17)$$

Прямыми вычислениями несложно получить

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi &= -e \frac{\text{grad} (R(y^0) - (\mathbf{R}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0)))}{R^2(y^0) (1 - (\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0)))^2} = \\ &= \frac{\mathbf{n}(y^0) - \boldsymbol{\beta}(y^0)}{R^2(y^0) (1 - (\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0)))^2}, \end{aligned} \quad (7.8.18)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} &= -e \frac{[\text{grad} (R(y^0) - (\mathbf{R}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0))) \times \boldsymbol{\beta}(y^0)]}{R^2(y^0) (1 - (\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0)))^2} = \\ &= -e \frac{[\mathbf{n}(y^0) \times \boldsymbol{\beta}(y^0)]}{R^2(y^0) (1 - (\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0)))^2}, \end{aligned} \quad (7.8.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y^0} &= e \left\{ \frac{(\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0)) - \beta^2(y^0)}{R^2(y^0) (1 - (\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0)))^2} + \frac{(\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}'(y^0))}{R(y^0) (1 - (\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0)))^2} \right\}, \\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y^0} &= e \frac{\boldsymbol{\beta}'(y^0)}{R(y^0) (1 - (\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0)))} + \boldsymbol{\beta}(y^0) \frac{\partial \varphi}{\partial y^0}. \end{aligned} \quad (7.8.20)$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по y^0 .

Подставляя (7.8.15), (7.8.17), (7.8.18), (7.8.19), (7.8.20) в (7.8.13), получаем

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2, \quad (7.8.21)$$

$$\mathbf{B}_1 = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1], \quad \mathbf{B}_2 = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_2].$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= e \frac{(\mathbf{n}(y^0) - \boldsymbol{\beta}(y^0))(1 - \beta^2(y^0))}{R^2(y^0) (1 - (\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0)))^3}, \\ \mathbf{B}_1 &= e \frac{[\boldsymbol{\beta}(y^0) \times \mathbf{n}(y^0)](1 - \beta^2(y^0))}{R^2(y^0) (1 - (\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0)))^3}, \end{aligned} \quad (7.8.22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= e \frac{[\mathbf{n}(y^0) \times [(\mathbf{n}(y^0) - \boldsymbol{\beta}(y^0)) \times \boldsymbol{\beta}'(y^0)]]}{R(y^0) (1 - (\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0)))^3}, \\ \mathbf{B}_2 &= e \frac{[\mathbf{n}(y^0) \times [\mathbf{n}(y^0) \times [(\mathbf{n}(y^0) - \boldsymbol{\beta}(y^0)) \times \boldsymbol{\beta}'(y^0)]]]}{R(y^0) (1 - (\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0)))^3}. \end{aligned} \quad (7.8.23)$$

Формулы (7.8.22), (7.8.23) определяют поле в точке наблюдения как функцию параметра y^0 , который, как уже указывалось, с точностью до константы c , является временем движущегося заряда.

Поля $\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1$ убывают с расстоянием как $R^{-2}(y^0)$, причем в системе покоя частицы магнитное поле отсутствует, а электрическое определяется законом Кулона. Если частица движется равномерно, то есть $\beta'(y^0) = 0$, то $\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2 = 0$. В разделах 6.9, 7.7 мы уже рассматривали поля, создаваемые равномерно движущимся зарядом. Покажем, что в этом случае формулы (7.8.22) совпадают с формулами (6.9.8), (7.7.12), (7.7.13), полученными ранее.

Когда скорость частицы постоянна, то есть $\beta(y^0) = \beta = \text{const}$, напряженность электрического поля равна

$$\mathbf{E}_1 = e \frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{R}(y^0) - \beta R(y^0))}{(R(y^0) - (\mathbf{R}(y^0)\beta))^3}. \quad (7.8.24)$$

Так как

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\equiv \mathbf{R}(x^0) = \mathbf{x} - \beta x^0, \\ \mathbf{R}(y^0) &= \mathbf{x} - \beta y^0, \end{aligned} \quad (7.8.25)$$

то

$$\mathbf{R}(y^0) - \beta R(y^0) = \mathbf{R}, \quad (7.8.26)$$

поскольку

$$R(y^0) = x^0 - y^0. \quad (7.8.27)$$

Из соотношения (7.8.26) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^2 - [\beta \times \mathbf{R}]^2 &= \mathbf{R}^2(1 - \beta^2) + (\beta \mathbf{R})^2 = \\ &= R^2(y^0) - 2R(y^0)(\beta \mathbf{R}(y^0)) + (\beta \mathbf{R}(y^0))^2 = (R(y^0) - (\beta \mathbf{R}(y^0)))^2, \end{aligned} \quad (7.8.28)$$

поэтому

$$R(y^0) - (\beta \mathbf{R}(y^0)) = \sqrt{\mathbf{R}^2 - [\beta \times \mathbf{R}]^2} = |\mathbf{R}| \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta}. \quad (7.8.29)$$

Очевидно, что из соотношения $\mathbf{V}_1 = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1]$ в силу соотношения (7.8.26) вытекает $\mathbf{V}_1 = [\beta \times \mathbf{E}_1]$. Таким образом, формулы (7.8.22) согласуются с (6.9.8):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= e \frac{\mathbf{R} (1 - \beta^2)}{|\mathbf{R}|^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}, \\ \mathbf{V}_1 &= e \frac{[\beta \times \mathbf{R}] (1 - \beta^2)}{|\mathbf{R}|^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Поля $\mathbf{E}_2, \mathbf{V}_2$ убывают с расстоянием как $R^{-1}(y^0)$, причем

$$|\mathbf{E}_2| = |\mathbf{V}_2|, \quad \mathbf{E}_2 \perp \mathbf{V}_2, \quad \mathbf{E}_2 \perp \mathbf{n}, \quad \mathbf{V}_2 \perp \mathbf{n}, \quad (7.8.30)$$

то есть они представляют собой поле электромагнитной волны.

7.9 Энергия электромагнитного поля

Получим выражение для энергии электромагнитного поля. Умножим уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{V} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (7.9.1)$$

слева скалярно на векторы \mathbf{E} и \mathbf{V} соответственно, и вычтем одно из другого (этот анзац мы использовали при доказательстве теоремы единственности). Имеем

$$(\mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{V}) - (\mathbf{V} \text{ rot } \mathbf{E}) = \frac{1}{c} \left\{ \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) + \left(\mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right) \right\} + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} \mathbf{E}), \quad (7.9.2)$$

откуда следует

$$\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \{ \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \} = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] - (\mathbf{jE}). \quad (7.9.3)$$

Проинтегрируем (7.9.3) по некоторой области V :

$$\frac{1}{8\pi} \int_V \frac{\partial}{\partial t} \{ \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \} dV = -\frac{c}{4\pi} \int_V \operatorname{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] dV - \int_V (\mathbf{jE}) dV. \quad (7.9.4)$$

Используя теорему Гаусса–Остроградского, получаем

$$\frac{1}{8\pi} \frac{d}{dt} \int_V \{ \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \} dV = -\frac{c}{4\pi} \oint_{\Gamma_V} (\mathbf{n} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]) dS - \int_V (\mathbf{jE}) dV. \quad (7.9.5)$$

Последний интеграл в соотношении (7.9.5) представляет собой работу поля по перемещению зарядов в области V . Поэтому

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \{ \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \} \quad (7.9.6)$$

можно интерпретировать как плотность энергии поля в области V , а вектор

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}], \quad (7.9.7)$$

который называется вектором Пойнтинга, можно интерпретировать как плотность потока энергии поля через границу Γ_V этой области. Формула (7.9.5) представляет собой математическое выражение теоремы об изменении энергии электромагнитного поля, в соответствии с которой энергия поля либо диссипируется вследствие совершения работы по перемещению зарядов, либо уходит из рассматриваемой области.

7.10 Излучение электромагнитных волн

Теперь мы покажем, что поток энергии (поток вектора Пойнтинга через границу области) далеко не всегда обращается в нуль при стремле-

нии объема области к бесконечности. Этот эффект называется излучением электромагнитных волн.

Мы рассмотрим это явление на примере решенной нами задачи о точечном заряде, который может двигаться произвольно, то есть с ускорением. В силу принципа суперпозиции излучение может иметь место и при рассмотрении системы зарядов.

Так как для поля, создаваемого точечным зарядом, имеют место соотношения (7.8.21), то выражение для потока энергии можно переписать в следующем виде:

$$I = \frac{c}{4\pi} \oint_{\Gamma_V} (\mathbf{n}[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]) dS = \frac{c}{4\pi} \oint_{\Gamma_V} (\mathbf{E}^2 - (\mathbf{nE})^2) dS. \quad (7.10.1)$$

Рассмотрим в качестве области V шар с радиусом R_0 , центр которого совпадает с точкой нахождения заряженной частицы. Тогда

$$I = \frac{c}{4\pi} \int (\mathbf{E}^2 - (\mathbf{nE})^2) R_0^2 d\mathcal{O}, \quad (7.10.2)$$

где $d\mathcal{O}$ элемент телесного угла. При стремлении R_0 к бесконечности (практически просто при больших значениях R_0) в интеграл (7.10.2) дает вклад только составляющая поля \mathbf{E}_2 . Поэтому интенсивность излучения (то есть энергия поля, уходящая на бесконечность), определяется как

$$I = \frac{c}{4\pi} \int |\mathbf{E}_2|^2 R_0^2 d\mathcal{O}. \quad (7.10.3)$$

Подставляя (7.8.23) в (7.10.3) получаем интенсивность излучения в элемент телесного угла в направлении вектора \mathbf{n} , наблюдаемую в момент времени x_0 :

$$dI_{\mathbf{n}} = \frac{e^2 c}{4\pi} \frac{[(\mathbf{n}(y^0) - \boldsymbol{\beta}(y^0))(\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}'(y^0)) - \boldsymbol{\beta}'(y^0)(1 - (\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0)))]^2}{(1 - (\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0)))^6} d\mathcal{O}. \quad (7.10.4)$$

В знаменателе формулы (7.10.4) стоят высокие степени величины

$$(1 - (\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0))) = (1 - \beta(y^0) \cos \theta), \quad (7.10.5)$$

где θ — угол между направлением на наблюдателя и скоростью частицы. Поэтому в ультрарелятивистском случае, когда параметр $\beta \sim 1$, практически все излучение сосредоточено в узком конусе с углом раствора $\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \beta^2}$.

Найдем теперь полную мощность излучения, то есть энергию W , которую частица излучает в единицу времени. Очевидно, что эта величина должна быть инвариантом. При вычислении необходимо учесть, что все величины в формуле (7.10.4) зависят от $y_0 = ct'$, а наблюдение происходит в момент времени, который характеризуется параметром $x_0 = ct$. Поэтому в формуле для мощности излучения присутствует дополнительный множитель, связывающий время наблюдения и время частицы

$$dW_{\mathbf{n}} = dI_{\mathbf{n}} \frac{\partial x_0}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial x_0}{\partial y_0} = (1 - (\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0))). \quad (7.10.6)$$

Следовательно,

$$W = \frac{e^2 c}{4\pi} \int d\mathcal{O} \left\{ \frac{2(\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}'(y^0))(\boldsymbol{\beta}(y^0)\boldsymbol{\beta}'(y^0))}{(1 - (\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0)))^4} + \frac{(\boldsymbol{\beta}'(y^0))^2}{(1 - (\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0)))^3} - \frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}'(y^0))^2}{(1 - (\mathbf{n}(y^0)\boldsymbol{\beta}(y^0)))^5} \right\}. \quad (7.10.7)$$

Для интегрирования удобно использовать формулы (А.4.4), учитывая, что $\{1, \boldsymbol{\beta}(y^0)\} = u^\mu \sqrt{1 - \beta^2}$ и обозначив $\{1, \mathbf{n}(y^0)\} = n^\mu$, $\{0, \boldsymbol{\beta}'(y^0)\} = a^\mu$. В

результате получаем

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{e^2 c}{4\pi} \int \frac{d\mathcal{O}}{(1-\beta^2)^{3/2}} \left\{ \frac{2(ua)n^\mu a_\mu}{(nu)^4} - \frac{(aa)}{(nu)^3} - \frac{n^\mu n^\nu a_\mu a_\nu}{(nu)^5} \right\} = \\
 &= \frac{e^2 c}{(1-\beta^2)^{3/2}} \left\{ 2(ua)a_\mu \left(\frac{4}{3}u^0 u^\mu - \frac{1}{3}g^{0\mu} \right) - (aa)u^0 - \right. \\
 &\quad \left. - a_\mu a_\nu \left(2u^0 u^\mu u^\nu - \frac{1}{3} [g^{0\mu} u^\nu + g^{0\nu} u^\mu + g^{\mu\nu} u^0] \right) \right\} = \\
 &= \frac{2e^2 c}{3(1-\beta^2)^2} ((ua)^2 - (aa)). \quad (7.10.8)
 \end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{(ua)^2 - (aa)}{(1-\beta^2)^2} = \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{(\dot{\beta})^2}{(1-\beta^2)^2} + \frac{(\beta\dot{\beta})^2}{(1-\beta^2)^3} \right\}, \quad (7.10.9)$$

то полная мощность излучения может быть выражена (см. (4.1.14)) через квадрат 4-ускорения частицы:

$$W = -\frac{2e^2}{3c} w^\mu w_\mu \equiv -\frac{2e^2}{3c} \left(\frac{du^\mu}{d\tau} \frac{du_\mu}{d\tau} \right). \quad (7.10.10)$$

Используя уравнение Лоренца в ковариантной форме (5.1.3)

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^\mu{}_\nu u^\nu,$$

формулу (7.10.10) можно переписать так:

$$W = \frac{2e^4}{3m^2 c^3} u^\mu F_{\mu\alpha} F^{\alpha\nu} u_\nu. \quad (7.10.11)$$

Подчеркнем, что здесь $F^\mu{}_\nu$ представляет собой тензор электромагнитного поля, в котором движется излучающая частица; он не включает в себя поле, создаваемое частицей. Как принято говорить, $F^\mu{}_\nu$ — тензор внешнего поля.

Если использовать запись уравнения Лоренца в явной форме (5.1.6)

$$\begin{aligned}\frac{du^0}{d\tau} &= \frac{e}{mc}(\mathbf{u}\mathbf{E}), \\ \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} &= \frac{e}{mc} \{u^0\mathbf{E} + [\mathbf{u} \times \mathbf{B}]\},\end{aligned}$$

то мощность излучения можно сразу выразить через напряженности полей и скорость частицы:

$$W = \frac{2e^4}{3m^2c^3}\gamma^2 \{ \mathbf{E}^2 + \beta^2\mathbf{B}^2 - (\beta\mathbf{E})^2 - (\beta\mathbf{B})^2 - 2(\beta[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]) \}. \quad (7.10.12)$$

Важными частными случаями применения формулы (7.10.12) являются выражения для мощности излучения в постоянных однородных полях, когда $\mathbf{B} = \text{const}$, $\mathbf{E} = \text{const}$.

Мощность излучения в чисто электрическом поле ($\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} \parallel \beta$) определяется формулой

$$W = \frac{2e^4}{3m^2c^3} \mathbf{E}^2. \quad (7.10.13)$$

Излучение такого типа имеет место при ускорении электронов электростатическим полем.

Мощность излучения в чисто магнитном поле ($\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} \perp \beta$) определяется формулой

$$W = \frac{2e^4}{3m^2c^3} \frac{\beta^2\mathbf{B}^2}{(1 - \beta^2)}. \quad (7.10.14)$$

Излучение такого типа имеет место при прохождении частицами поворотных магнитов кольцевых ускорителей, поэтому оно называется синхротронным излучением.

Обращает на себя внимание тот факт, что мощность излучения в магнитном поле пропорциональна квадрату лоренц-фактора, вследствие чего его мощность резко растет с энергией \mathcal{E} ускоряемых частиц. Действитель-

но, радиус орбиты электрона в магнитном поле (см. (5.3.8))

$$R = \frac{c\beta}{\omega_c \sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \frac{mc^2 \beta}{e|\mathbf{B}| \sqrt{1 - \beta^2}},$$

поэтому, учитывая, что в ускорителе радиус орбиты практически фиксирован, для мощности синхротронного излучения при $\beta \approx 1$ получаем

$$W \simeq \frac{2ce^2}{3R^2} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^4. \quad (7.10.15)$$

В свое время имели место опасения, что соотношение (7.10.15) может сделать невозможным создание электронных циклических ускорителей на большие энергии, так как реально ускоряется не одна частица, а сгусток (банч), в котором число электронов N достаточно велико. Если бы банч излучал как одна частица, это привело бы к квадратичному по числу электронов в банче росту мощности. Однако реальное синхротронное излучение не является когерентным³, мощность излучения прямо пропорциональна числу электронов в ускоряемом сгустке.

В настоящее время синхротронное излучение из неприятного для физики высоких энергий явления превратилось в мощный инструмент исследования структуры различных объектов, чему способствуют его уникальные свойства⁴.

³Основная часть мощности синхротронного излучения приходится на рентгеновский диапазон. Однако имеет место и низкоэнергетический «хвост», в котором длины волн излучения сопоставимы с размерами банча. В этой части спектра экспериментально наблюдается когерентное излучение.

⁴См., например, А. А. Соколов, И. М. Тернов, *Релятивистский электрон*, М., Наука (1983).

Глава 8

Метод Лагранжа

8.1 Уравнения Лагранжа

В разделе 5.1 мы получили уравнение движения частицы в электромагнитном поле (уравнение Лоренца), воспользовавшись соображениями симметрии. Теперь мы исследуем движение частиц, используя более общие математические методы.

Как известно из курса теоретической механики, при выполнении определенных условий¹, механическую систему можно характеризовать функцией Лагранжа $L(x, \dot{x}, t)$. Эволюция системы в интервале времени $[t_1, t_2]$ определяется из условия стационарности функции действия $S(t_1, t_2)$:

$$\delta S = 0, \quad (8.1.1)$$

причем

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt. \quad (8.1.2)$$

Здесь x, \dot{x} — независимые координаты и скорости.

¹Строгое математическое описание метода Лагранжа см., например, в книге: Э. М. Галеев, *Методы оптимизации*, Баку, Издательство филиала МГУ в г. Баку (2016).

Будем варьировать действие, считая, что положения и скорости в моменты времени t_1, t_2 фиксированы (варьирование при «закрепленных концах»). Тогда

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right\} dt. \quad (8.1.3)$$

Проинтегрируем второй член в (8.1.3) по частям:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x dt. \quad (8.1.4)$$

Подстановка обнуляется, так как $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$. Поэтому

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right\} \delta x dt = 0. \quad (8.1.5)$$

Поскольку вариация δx произвольна, то из (8.1.5) следует, что вариационная производная действия

$$\frac{\delta S}{\delta x} = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0. \quad (8.1.6)$$

Таким образом, мы имеем систему n уравнений, где n — число независимых координат системы (степеней свободы).

Чтобы уравнения Лагранжа были релятивистски-инвариантными, действие должно быть инвариантным относительно преобразований из группы Лоренца.

Рассмотрим точечную частицу. Если частица свободная, то единственный 4-скаляр, который можно построить из характеристик ее движения, — это собственное время. Следовательно, действие для свободной частицы должно иметь вид

$$S_0 = \alpha \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \equiv \alpha \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \beta^2} dt, \quad (8.1.7)$$

где α — константа, которая выбирается исходя из принципа соответствия. В нерелятивистской механике функция Лагранжа представляет собой разность кинетической энергии $mv^2/2$ и потенциальной энергии. При $\beta \rightarrow 0$

$$\sqrt{1 - \beta^2} \approx 1 - \beta^2/2 + \dots$$

Поэтому необходимо положить $\alpha = -mc^2$. Таким образом, функция Лагранжа свободной точечной релятивистской частицы равна

$$L_0 = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (8.1.8)$$

Построим теперь вклад в функцию Лагранжа, который описывает взаимодействие частицы с электромагнитным полем. Очевидно, что он должен представлять собой свертку какой-нибудь характеристики частицы и характеристики электромагнитного поля. Если постулировать, что движение описывается дифференциальными уравнениями не выше второго порядка, то в качестве характеристики частицы можно выбрать только 4-скорость u^μ , а в качестве характеристики поля — 4-потенциал A^μ . Действительно, так как тензор поля и дуальный ему тензор антисимметричны, то скаляры, построенные с их использованием, обращаются в нуль. Поэтому вклад в действие, описывающий взаимодействие заряженной частицы с электромагнитным полем, должен иметь вид

$$S_{\text{int}} = \alpha' \int_{\tau_1}^{\tau_2} A^\mu u_\mu d\tau \equiv \alpha' \int_{t_1}^{t_2} A^\mu u_\mu \sqrt{1 - \beta^2} dt. \quad (8.1.9)$$

Константа α' определяется исходя из принципа соответствия. Так как $u_\mu \sqrt{1 - \beta^2} \sim j_\mu$, где j_μ — вектор тока точечной частицы, то очевидно, что α' должна быть пропорциональна заряду. В гауссовой системе единиц $\alpha' = -e$, где e — заряд частицы. Следовательно,

$$L_{\text{int}} = -e\varphi + \frac{e}{c}(\mathbf{v}\mathbf{A}), \quad (8.1.10)$$

а полная функция Лагранжа определяется формулой

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - e\varphi + \frac{e}{c}(\mathbf{v}\mathbf{A}). \quad (8.1.11)$$

Найдем уравнения движения точечной частицы. Уравнения Лагранжа (8.1.6) принимают вид

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) = 0. \quad (8.1.12)$$

Подставляя (8.1.11) в (8.1.12), получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) + e\nabla\varphi - \frac{e}{c}\nabla(\mathbf{A}\mathbf{v}) = 0. \quad (8.1.13)$$

Для любых двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} справедливо равенство

$$\nabla(\mathbf{a}\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} + [\mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{b}] + [\mathbf{b} \times \text{rot } \mathbf{a}], \quad (8.1.14)$$

поэтому²

$$\nabla(\mathbf{A}\mathbf{v}) = (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A} + [\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A}]. \quad (8.1.15)$$

Поскольку полная производная

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A}, \quad (8.1.16)$$

то из формулы (8.1.13) следует

$$\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = -e \text{grad } \varphi - \frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A}]. \quad (8.1.17)$$

Используя связь между полями и потенциалами (7.1.3), получаем

$$\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (8.1.18)$$

²Остальные члены, входящие в соотношение (8.1.14), как нетрудно проверить прямым вычислением, обнуляются.

Умножим равенство (8.1.18) на \mathbf{v} слева. Так как

$$\frac{d\beta^2}{dt} = \frac{2}{c^2} \left(\mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right), \quad (8.1.19)$$

то

$$\left(\mathbf{v} \frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \frac{m}{(1-\beta^2)^{3/2}} \left(\mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (8.1.20)$$

Откуда следует

$$\frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = e(\mathbf{v}\mathbf{E}). \quad (8.1.21)$$

Поделив (8.1.18) и (8.1.21) на $c\sqrt{1-\beta^2}$ имеем

$$\begin{aligned} mc \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} &= eu^0 \mathbf{E} + e[\mathbf{u} \times \mathbf{B}], \\ mc \frac{du^0}{d\tau} &= e(\mathbf{u}\mathbf{E}). \end{aligned} \quad (8.1.22)$$

В четырехмерной форме

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^{\mu\nu} u_\nu. \quad (8.1.23)$$

Как и следовало ожидать, уравнение движения представляет собой уравнение Лоренца (5.1.3). Еще раз подчеркнем, что уравнение (8.1.23) явно калибровочно инвариантно. Действительно, изменение калибровки потенциала

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu f(x)$$

приводит к изменению интеграла действия

$$\Delta S = -e \int_{\tau_1}^{\tau_2} u^\mu \partial_\mu f(x) d\tau = -e \int_{\tau_1}^{\tau_2} df(x) = e (f(x(\tau_1)) - f(x(\tau_2))).$$

При выводе уравнений Лагранжа мы производим варьирование действия при заданных начальном и конечном состояниях частицы, считая, что

$\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$, поэтому $\delta \Delta S = 0$. Следовательно, изменение калибровки не изменяет вариацию действия.

Таким образом, мы получили релятивистское уравнение движения частицы — уравнение Лоренца — исходя из фундаментального принципа экстремальности действия. Однако необходимо подчеркнуть, что явный вид функции Лагранжа, а следовательно и функционала действия, мы снова выбрали, используя соображения релятивистской инвариантности и принцип соответствия с экспериментальными данными в нерелятивистской области. То есть мы использовали те же соображения, что и при прямом выводе этого уравнения. И то, что из (8.1.11) следует уравнение Лоренца, означает, что оба подхода согласованы, и мы угадали вид функции Лагранжа для релятивистской частицы, находящейся в электромагнитном поле. Тем самым мы открыли возможность для построения хорошо известного из классической механики гамильтонова формализма. Что, в принципе, позволяет использовать мощные математические методы. Однако у каждой частицы свое собственное время, что затрудняет возможность последовательного релятивистского описания взаимодействующих между собой частиц.

8.2 Уравнение Гамильтона–Якоби

Мы выяснили, что функция Лагранжа для точечной заряженной частицы в электромагнитном поле имеет вид (8.1.11):

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - e\varphi + \frac{e}{c} (\mathbf{v}\mathbf{A}).$$

По определению, канонический импульс \mathbf{P} задается формулой

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}, \quad (8.2.1)$$

а функция Гамильтона H — формулой

$$H = (\mathbf{P}\mathbf{v}) - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + e\varphi = \sqrt{m^2c^4 + c^2 \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2} + e\varphi. \quad (8.2.2)$$

Введем четырехмерный канонический импульс

$$P^\mu = p^\mu + \frac{e}{c}A^\mu = \left\{ \frac{H}{c}, \mathbf{P} \right\}, \quad (8.2.3)$$

где

$$p^\mu = mcu^\mu = \left\{ \frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right\} \quad (8.2.4)$$

— кинетический импульс, а

$$A^\mu = \{\varphi, \mathbf{A}\}. \quad (8.2.5)$$

Поскольку

$$p^2 = m^2c^2, \quad (8.2.6)$$

то

$$\left(P - \frac{e}{c}A\right)^2 = m^2c^2. \quad (8.2.7)$$

Вернемся к определению интеграла действия:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \quad (8.2.8)$$

Так как (см. (8.2.2)) $L = (\mathbf{P}\mathbf{v}) - H$, то

$$L dt = (\mathbf{P}\mathbf{v}) dt - H dt = (\mathbf{P}d\mathbf{r}) - H dt = -P^\mu dx_\mu. \quad (8.2.9)$$

Поэтому

$$S = - \int_{x_1}^{x_2} P^\mu dx_\mu. \quad (8.2.10)$$

Пределы интегрирования x_1, x_2 соответствуют начальному и конечному положению частицы в пространстве событий. Форма $P^\mu dx_\mu$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции $S^*(x)$, причем

$$P^\mu = \frac{\partial S^*}{\partial x_\mu}. \quad (8.2.11)$$

Таким образом,

$$S = - \int_{x_1}^{x_2} dS^* = S^*(x_1) - S^*(x_2). \quad (8.2.12)$$

Из соотношения (8.2.7) следует, что

$$\left(\frac{\partial S^*}{\partial x_\mu} - \frac{e}{c} A^\mu \right) \left(\frac{\partial S^*}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} A_\mu \right) = m^2 c^2. \quad (8.2.13)$$

Уравнение (8.2.13) представляет собой релятивистский аналог уравнения Гамильтона–Якоби.

Рассмотрим так называемый полный интеграл этого уравнения $S(x, \alpha)$, то есть решение, зависящее от конечного набора некоторых констант³ α . Проварьируем $S(x, \alpha)$ по указанным постоянным

$$\delta S(x, \alpha) = \frac{\partial S}{\partial \alpha^\nu} \delta \alpha^\nu \quad (8.2.14)$$

и продифференцируем по собственному времени частицы:

$$\frac{d}{d\tau} \delta S(x, \alpha) = \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta S(x, \alpha) = cu^\mu \delta \alpha^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial \alpha^\nu}. \quad (8.2.15)$$

Переставляя дифференцирования по x^μ и α^ν , а также учитывая (8.2.11), получаем

$$\frac{d}{d\tau} \delta S(x, \alpha) = cu^\mu \delta \alpha^\nu \frac{\partial P_\mu}{\partial \alpha^\nu} = cu^\mu \delta P_\mu, \quad (8.2.16)$$

где δP_μ — вариация канонического импульса при изменении параметров α .

³В дальнейшем звездочку в обозначении для этого решения мы будем опускать.

Канонический импульс определяется формулой (8.2.3), то есть

$$P^\mu = mcu^\mu + \frac{e}{c}A^\mu.$$

Поскольку A^μ не содержит параметров α (внешнее поле, а, следовательно, и потенциал, заданы), то

$$\delta P_\mu = mc\delta u_\mu. \quad (8.2.17)$$

Поэтому

$$\frac{d}{d\tau}\delta S(x, \alpha) = mc^2 u^\mu \delta u_\mu = \frac{1}{2}mc^2 \delta(u^\mu u_\mu) = 0, \quad (8.2.18)$$

так как $u^\mu u_\mu \equiv 1$.

Таким образом, вариации функции $S(x, \alpha)$ по параметрам α не зависят от собственного времени, то есть являются интегралами движения. Это утверждение составляет содержание теоремы Якоби:

$$\frac{\partial S(x, \alpha)}{\partial \alpha_\nu} = \beta^\nu, \quad (8.2.19)$$

где β^ν — набор констант.

Уравнения (8.2.19) определяют координаты частицы как функции набора выбранных параметров α и β : $x^\mu = x^\mu(\alpha, \beta)$; очевидно, что система (8.2.19) не может содержать более четырех независимых уравнений. Однако в уравнение Гамильтона–Якоби входят только производные от функции $S(x)$, что позволяет выбрать одну из констант α аддитивной, то есть

$$S(x, \alpha) = S(x, \boldsymbol{\alpha}) + \alpha_0. \quad (8.2.20)$$

Это приводит к тому, что одно из уравнений (8.2.19) становится тривиальным: $\beta_0 = 1$. Следовательно, параметры α не могут быть заданы произвольным образом, они подчинены дополнительному условию. Таким образом, система (8.2.19) содержит три независимых уравнения, которые да-

ют возможность найти закон движения частицы $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$. При этом шесть параметров $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ представляют собой функции начальных условий⁴.

Для решения уравнения (8.2.13) удобно использовать метод разделения переменных. Этот метод применим, если симметрия задачи позволяет выбрать такие обобщенные координаты q^μ , что действие можно представить в виде

$$S(x) = S_0(q^0) + S_1(q^1) + S_2(q^2) + S_3(q^3). \quad (8.2.21)$$

Еще раз подчеркнем, что уравнение Лоренца калибровочно инвариантно, а уравнение Гамильтона–Якоби — нет, так как канонический импульс явно зависит от потенциала. Поэтому выбором калибровки потенциала можно изменять симметрию уравнения. Это позволяет, вообще говоря, проводить процедуру разделения переменных для различных наборов обобщенных координат.

8.3 Свободная частица

Рассмотрим случай, когда $A^\mu = 0$. Тогда уравнение (8.2.13) принимает вид

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = m^2 c^2. \quad (8.3.1)$$

Так как (8.3.1) не зависит от координат пространства событий явно, то будем искать решение этого уравнения в виде

$$S = p^\mu x_\mu = \mathcal{E}t - xp_x - yp_y - zp_z \equiv \mathcal{E}t - (\mathbf{x}\mathbf{p}). \quad (8.3.2)$$

⁴Начальные условия, рассматриваемые как функции текущих координат и скоростей, конечно же, являются интегралами движения.

Чтобы (8.3.2) было решением уравнения (8.3.1), необходимо и достаточно потребовать выполнения условия

$$\mathcal{E} = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}, \quad (8.3.3)$$

которое представляет собой релятивистский закон дисперсии, то есть связь между энергией частицы \mathcal{E} и ее импульсом \mathbf{p} . Продифференцировав (8.3.2) по компонентам импульса, получаем в силу теоремы Якоби

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{p}} \right) = -\mathbf{x} + \mathbf{p} \frac{tc^2}{\mathcal{E}} = -\mathbf{x}_0. \quad (8.3.4)$$

Поскольку

$$\mathbf{p} \frac{c^2}{\mathcal{E}} = \mathbf{v}, \quad (8.3.5)$$

где \mathbf{v} — скорость частицы, то

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{v}t. \quad (8.3.6)$$

Таким образом, мы вновь получили результат (5.2.3) — свободная релятивистская частица движется с постоянной скоростью.

8.4 Частица в поле неподвижного кулоновского центра

Учитывая симметрию задачи, выберем в качестве обобщенных координат сферические координаты r, θ, ϕ . Тогда естественной формой 4-потенциала является

$$A^\mu = \left\{ \frac{e'}{r}, \mathbf{0} \right\}, \quad (8.4.1)$$

где e' — заряд кулоновского центра.

Уравнение Гамильтона–Якоби принимает вид

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 = m^2 c^2. \quad (8.4.2)$$

Здесь $\alpha = ee'$ — произведение зарядов кулоновского центра и рассматриваемой нами частицы. Будем искать решение этого уравнения в виде

$$S = S_0(t) + S_r(r) + S_\theta(\theta) + S_\phi(\phi). \quad (8.4.3)$$

Поскольку уравнение (8.4.2) не зависит от t и ϕ явно, то есть эти переменные являются циклическими, то

$$S_0(t) = \mathcal{E}t, \quad S_\phi(\phi) = \lambda\phi. \quad (8.4.4)$$

Очевидно, что \mathcal{E} — полная энергия частицы, а параметр λ , как будет ясно из дальнейшего, связан с угловым моментом. Подставляя (8.4.3) и (8.4.4) в (8.4.2), получаем

$$\frac{1}{c^2} \left(\mathcal{E} - \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_r(r)}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S_\theta(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\lambda^2}{r^2 \sin^2 \theta} = m^2 c^2. \quad (8.4.5)$$

Так как соотношение (8.4.5) должно выполняться тождественно, то

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S_\theta(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\lambda^2}{\sin^2 \theta} &= \varrho^2, \\ \frac{1}{c^2} \left(\mathcal{E} - \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_r(r)}{\partial r} \right)^2 - \frac{\varrho^2}{r^2} &= m^2 c^2, \end{aligned} \quad (8.4.6)$$

где ϱ^2 — некоторая произвольная положительная константа.

Следовательно,

$$S_\theta(\theta) = \pm \int \frac{\sqrt{\varrho^2 \sin^2 \theta - \lambda^2}}{\sin \theta} d\theta, \quad (8.4.7)$$

$$S_r(r) = \pm \int \sqrt{\frac{1}{c^2} \left(\mathcal{E} - \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \frac{\varrho^2}{r^2} - m^2 c^2} dr, \quad (8.4.8)$$

Рассмотрим производную действия по параметру λ . В силу теоремы Якоби она должна равняться константе:

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \lambda_0 = \text{const.} \quad (8.4.9)$$

Поэтому

$$\phi - \lambda_0 = \pm \int \frac{\lambda d\theta}{\sin \theta \sqrt{\varrho^2 \sin^2 \theta - \lambda^2}}. \quad (8.4.10)$$

Входящий в (8.4.10) интеграл выражается через элементарные функции:

$$\begin{aligned} \pm \int \frac{\lambda d\theta}{\sin \theta \sqrt{\varrho^2 \sin^2 \theta - \lambda^2}} &= \pm \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{(\varrho^2/\lambda^2 - 1) - \operatorname{ctg}^2 \theta}} = \\ &= \mp \int \frac{d(\operatorname{ctg} \theta)}{\sqrt{(\varrho^2/\lambda^2 - 1) - \operatorname{ctg}^2 \theta}} = \pm \arccos \left(\frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sqrt{\varrho^2/\lambda^2 - 1}} \right). \end{aligned} \quad (8.4.11)$$

Таким образом,

$$\phi - \lambda_0 = \pm \arccos \left(\frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sqrt{\varrho^2/\lambda^2 - 1}} \right), \quad (8.4.12)$$

откуда получаем

$$\cos(\phi - \lambda_0) \sqrt{\varrho^2/\lambda^2 - 1} = \operatorname{ctg} \theta. \quad (8.4.13)$$

Поскольку значение $\sin \theta = 0$ не входит в область определения (8.4.10), можно умножить (8.4.13) на $\sin \theta$:

$$\cos \theta - \sqrt{\varrho^2/\lambda^2 - 1} \sin \theta (\cos \phi \cos \lambda_0 + \sin \phi \sin \lambda_0) = 0. \quad (8.4.14)$$

Соотношение (8.4.14) представляет собой уравнение плоскости, проходящей через начало координат, то есть через кулоновский центр. Следовательно, траектория рассматриваемого движения лежит в этой плоскости. Поэтому при его описании можно выбрать любое значение угла θ , то есть положить $S_\theta(\theta) = \text{const}$.

Удобно считать, что полярная ось перпендикулярна плоскости орбиты. Тогда $\cos \theta = 0$, а $\varrho = \lambda = M$. Параметр M — это полный угловой момент. С учетом этого, можно записать

$$S = \mathcal{E}t + M\phi \pm \int \sqrt{\frac{1}{c^2} \left(\mathcal{E} - \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \frac{M^2}{r^2} - m^2 c^2} dr. \quad (8.4.15)$$

Соответственно,

$$\frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}} = t \pm \int \frac{\left(\mathcal{E} - \frac{\alpha}{r}\right)}{c^2 \sqrt{\frac{1}{c^2} \left(\mathcal{E} - \frac{\alpha}{r}\right)^2 - \frac{M^2}{r^2} - m^2 c^2}} dr = t_0, \quad (8.4.16)$$

$$\frac{\partial S}{\partial M} = \phi \mp \int \frac{M}{r^2 \sqrt{\frac{1}{c^2} \left(\mathcal{E} - \frac{\alpha}{r}\right)^2 - \frac{M^2}{r^2} - m^2 c^2}} dr = \phi_0. \quad (8.4.17)$$

В (8.4.16), (8.4.17) сделаем замену переменных

$$x = 1/r, \quad dx = -\frac{dr}{r^2},$$

после чего получаем

$$t - t_0 = \pm \int \frac{(\mathcal{E} - \alpha x)/(cx^2)}{\sqrt{(\alpha^2 - M^2 c^2)x^2 - 2\mathcal{E}\alpha x + (\mathcal{E}^2 - m^2 c^4)}} dx, \quad (8.4.18)$$

$$\phi - \phi_0 = \mp \int \frac{Mc}{\sqrt{(\alpha^2 - M^2 c^2)x^2 - 2\mathcal{E}\alpha x + (\mathcal{E}^2 - m^2 c^4)}} dx. \quad (8.4.19)$$

Рассмотрим соотношение (8.4.19), которое задает траектории движения частицы. После замены переменной интегрирования

$$y = x - \mathcal{E}\alpha/\Delta, \quad \Delta = \alpha^2 - M^2 c^2, \quad (8.4.20)$$

имеем

$$\phi - \phi_0 = \mp Mc \int \frac{dy}{\sqrt{\Delta(y^2 - y_0^2/\Delta^2)}}, \quad (8.4.21)$$

где

$$\begin{aligned} y_0^2 &= \mathcal{E}^2 \alpha^2 - (\mathcal{E}^2 - m^2 c^4) (\alpha^2 - M^2 c^2) = \\ &= m^2 c^4 (\alpha^2 - M^2 c^2) + \mathcal{E}^2 M^2 c^2 = \\ &= m^2 c^4 \alpha^2 + (\mathcal{E}^2 - m^2 c^4) M^2 c^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (8.4.22)$$

Очевидно, что неравенство (8.4.22) выполняется, когда $\Delta \geq 0$. Если же $\Delta < 0$, оно должно выполняться, в противном случае подкоренное выражение в интеграле, фигурирующем в формуле (8.4.21), никогда не будет

принимать положительные значения. Если $\mathcal{E}^2 - m^2c^4 \geq 0$, то видно, что $y_0^2 > 0$. В случае же $\Delta < 0$, $\mathcal{E}^2 - m^2c^4 < 0$ необходимо выбирать только такие значения \mathcal{E} , M для которых неравенство (8.4.22) справедливо.

Рассмотрим этот вопрос детально. Энергия и угловой момент релятивистской частицы в поле кулоновского центра могут быть записаны следующим образом:

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\alpha}{r}, \quad (8.4.23)$$

$$\mathbf{M} = \frac{mc[\mathbf{r} \times \boldsymbol{\beta}]}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (8.4.24)$$

Так как обобщенные импульсы \mathcal{E} , M сохраняются, то они выражаются через начальные радиус-вектор \mathbf{r}_0 и скорость $\boldsymbol{\beta}_0$ частицы:

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}} + \frac{\alpha}{r_0}, \quad (8.4.25)$$

$$M = |\mathbf{M}| = \left| \frac{mc[\mathbf{r}_0 \times \boldsymbol{\beta}_0]}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \right|. \quad (8.4.26)$$

При этом максимально возможное значение M определяется формулой

$$M_{\max} = \frac{mcr_0\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}}. \quad (8.4.27)$$

Очевидно, что если при $\mathcal{E}^2 - m^2c^4 < 0$ имеет место неравенство

$$\tilde{y}_0^2 = m^2c^4\alpha^2 + (\mathcal{E}^2 - m^2c^4) M_{\max}^2c^2 \geq 0, \quad (8.4.28)$$

то будет выполняться и неравенство (8.4.22). Подставив (8.4.25), (8.4.27) в (8.4.22), получаем

$$\tilde{y}_0^2 = \frac{m^2c^4r_0^2}{1-\beta_0^2} \left(\frac{mc^2\beta_0^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}} + \frac{\alpha}{r_0} \right)^2 \geq 0, \quad (8.4.29)$$

Таким образом, неравенство (8.4.22) выполняется. Из него следует ограничение на возможные значения энергии частицы при фиксированном угловом моменте:

$$\mathcal{E}^2 \geq m^2 c^4 \left(1 - \frac{\alpha^2}{M^2 c^2} \right). \quad (8.4.30)$$

Ясно, что это ограничение существенно только тогда, когда $\Delta < 0$. Получим еще одно ограничение на величину энергии. Запишем энергию, используя радиальную p_r и азимутальную M/r компоненты импульса. Имеем

$$\mathcal{E} = \sqrt{m^2 c^4 + p_r^2 c^2 + M^2 c^2 / r^2} + \alpha / r. \quad (8.4.31)$$

Очевидно, что при любом знаке α , если $M^2 c^2 > \alpha^2$, то $\mathcal{E} \geq 0$. Следовательно, если $\Delta < 0$, то

$$\mathcal{E} \geq \mathcal{E}_0 = m c^2 \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{M^2 c^2}}. \quad (8.4.32)$$

Характер движения определяется знаком параметра Δ . Пусть $\Delta > 0$. Тогда (константа интегрирования убирается переопределением ϕ_0)

$$\phi - \phi_0 = \mp \frac{M c}{\Delta^{1/2}} \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - y_0^2 / \Delta^2}} = \frac{M c}{\Delta^{1/2}} \text{Arch} \left| \frac{\Delta}{y_0} y \right|. \quad (8.4.33)$$

Равенство (8.4.33) приводит к соотношению

$$|y| = \frac{|y_0|}{\Delta} \text{ch} \left(\frac{(\phi - \phi_0) \Delta^{1/2}}{M c} \right), \quad (8.4.34)$$

из которого следует явный вид траектории частицы:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\Delta}{\mathcal{E} \alpha \mp |y_0| \text{ch} \left((\phi - \phi_0) \Delta^{1/2} / M c \right)} = \\ &= \frac{\alpha^2 - M^2 c^2}{\mathcal{E} \alpha \mp \sqrt{\mathcal{E}^2 \alpha^2 - (\mathcal{E}^2 - m^2 c^4) (\alpha^2 - M^2 c^2)} \text{ch} \left((\phi - \phi_0) \sqrt{\alpha^2 / M^2 c^2 - 1} \right)}. \end{aligned} \quad (8.4.35)$$

При анализе этого соотношения учтем, что $\operatorname{ch} x \geq 1$ и должно выполняться $r \geq 0$. Если потенциал отталкивающий ($\alpha > 0$), то $\mathcal{E} > mc^2$ (см. (8.4.31)). Это неравенство означает, что частица может удалиться на бесконечно большое расстояние от центра, то есть должна существовать возможность $r \rightarrow \infty$. Это реализуется только тогда, когда в (8.4.35) выбирается знак «−». Если потенциал притягивающий ($\alpha < 0$), то энергия формально может иметь произвольное значение. Однако условие $r \geq 0$ и возможность $r \rightarrow \infty$ только при $\mathcal{E} > mc^2$, приводят к необходимости выбора в формуле (8.4.35) знака «+». Имеется три типа траекторий (см. Рис. 8.1–8.3).

$$1. \quad \Delta > 0, \quad \alpha > 0, \quad \mathcal{E} > mc^2.$$

Траектория уходит на бесконечность при обоих значениях угла ϕ , определяемых условием $\mathcal{E}\alpha = |y_0| \operatorname{ch}((\phi - \phi_0)\Delta^{1/2}/Mc)$. Частица подходит к центру на минимальное расстояние $r_{\min} = \Delta/(\mathcal{E}\alpha - |y_0|)$.

$$2. \quad \Delta > 0, \quad \alpha < 0, \quad \mathcal{E} > mc^2.$$

Траектория уходит на бесконечность при одном значении угла ϕ , определяемом условием $\mathcal{E}\alpha = -|y_0| \operatorname{ch}((\phi - \phi_0)\Delta^{1/2}/Mc)$. Частица падает на центр по спирали, совершая бесконечное число оборотов.

$$3. \quad \Delta > 0, \quad \alpha < 0, \quad \mathcal{E} < mc^2.$$

Траектория не уходит на бесконечность, она локализована в круге с радиусом $r_{\max} = \Delta/(\mathcal{E}\alpha + |y_0|)$. Частица падает на центр по спирали, совершая бесконечное число оборотов.

Необходимо отметить, что время падения на центр конечно, так как интеграл (8.4.18) сходится при $x \rightarrow \infty$.

Чтобы рассмотреть случай $\Delta < 0$, сделаем аналитическое продолжение на эту область в формуле (8.4.35). Имеем

$$\begin{aligned} r &= \frac{\Delta}{\mathcal{E}\alpha - |y_0| \cos \left((\phi - \phi_0) |\Delta|^{1/2} / Mc \right)} = \\ &= \frac{\alpha^2 - M^2 c^2}{\mathcal{E}\alpha - \sqrt{\mathcal{E}^2 \alpha^2 + (\mathcal{E}^2 - m^2 c^4)(M^2 c^2 - \alpha^2)} \cos \left((\phi - \phi_0) \sqrt{1 - \alpha^2 / M^2 c^2} \right)}. \end{aligned} \quad (8.4.36)$$

Выбор знака в (8.4.36) произволен, знак компенсируется путем подбора постоянной интегрирования. Имеется три типа траекторий (см. Рис. 8.4–8.5).

$$4. \quad \Delta < 0, \quad \alpha > 0, \quad \mathcal{E} > mc^2.$$

Траектория уходит на бесконечность при обоих значениях угла ϕ , определяемых условием $\mathcal{E}\alpha = |y_0| \cos \left((\phi - \phi_0) |\Delta|^{1/2} / Mc \right)$. Частица подходит к центру на минимальное расстояние $r_{\min} = \Delta / (\mathcal{E}\alpha - |y_0|)$.

$$5. \quad \Delta < 0, \quad \alpha < 0, \quad \mathcal{E} > mc^2.$$

Траектория уходит на бесконечность при обоих значениях угла ϕ , определяемых условием $\mathcal{E}\alpha = |y_0| \cos \left((\phi - \phi_0) |\Delta|^{1/2} / Mc \right)$. Частица огибает центр, причем при относительно малых угловых моментах сделав вокруг него несколько оборотов (так называемое «сияние»), подходя к нему на минимальное расстояние $r_{\min} = \Delta / (\mathcal{E}\alpha - |y_0|)$.

$$6. \quad \Delta < 0, \quad \alpha < 0, \quad \mathcal{E}_0 < \mathcal{E} < mc^2.$$

Траектория представляет собой розетку, которая локализована в кольце с радиусами $r_{\max} = \Delta / (\mathcal{E}\alpha + |y_0|)$ и $r_{\min} = \Delta / (\mathcal{E}\alpha - |y_0|)$.

Если $\Delta = 0$, то

$$\phi - \phi_0 = \pm \frac{1}{\mathcal{E}} \sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2 c^4 - 2\alpha \mathcal{E} x}, \quad (8.4.37)$$

откуда следует

$$r = \frac{2\mathcal{E}\alpha}{\mathcal{E}^2 - m^2c^4 - \mathcal{E}^2(\phi - \phi_0)^2}. \quad (8.4.38)$$

Имеется три типа траекторий.

$$7. \quad \Delta = 0, \quad \alpha > 0, \quad \mathcal{E} > mc^2.$$

Траектория уходит на бесконечность при $\phi - \phi_0 = \pm\sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2c^4}/\mathcal{E}$. Частица подходит к центру на минимальное расстояние $r_{\min} = 2\mathcal{E}\alpha/(\mathcal{E}^2 - m^2c^4)$.

$$8. \quad \Delta = 0, \quad \alpha < 0, \quad \mathcal{E} > mc^2.$$

Траектория уходит на бесконечность при $\phi - \phi_0 = \sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2c^4}/\mathcal{E}$. Частица падает на центр по спирали, совершая бесконечное число оборотов.

$$9. \quad \Delta = 0, \quad \alpha < 0, \quad 0 < \mathcal{E} < mc^2.$$

Траектория не уходит на бесконечность, она локализована в круге с радиусом $r_{\max} = 2\mathcal{E}\alpha/(\mathcal{E}^2 - m^2c^4)$. Частица падает на центр по спирали, совершая бесконечное число оборотов. Необходимо отметить, что время падения на центр конечно, так как интеграл (8.4.18) сходится при $x \rightarrow \infty$, если $\Delta = 0$.

Чтобы получить решение нерелятивистской задачи Кеплера, в (8.4.36) необходимо формально перейти к пределу $c \rightarrow \infty$. Оставляя в

$$\begin{aligned} y_0^2 &= m^2c^4\alpha^2 + M^2c^2(\mathcal{E}^2 - m^2c^4) = \\ &= m^2c^4\alpha^2 + M^2c^2 \left[p^2c^2 + \alpha^2/r^2 + 2\alpha\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}/r \right] \end{aligned}$$

только члены $\sim c^4$, находим

$$r = -\frac{M^2}{\alpha m \left[1 - \text{sign } \alpha \sqrt{1 + \frac{2M^2\mathcal{E}_{\text{nr}}}{m\alpha^2}} \cos(\phi - \phi_0) \right]}, \quad (8.4.39)$$

где $\mathcal{E}_{\text{nr}} = \frac{p^2}{2m} + \frac{\alpha}{r} = \text{const}$ — сохраняющаяся нерелятивистская энергия.

Как хорошо известно, в этом случае возможны только два типа траекторий. Если $\mathcal{E}_{\text{nr}} > 0$, то траектория представляет собой гиперболу, а если $\mathcal{E}_{\text{nr}} < 0$, то траектория представляет собой эллипс.

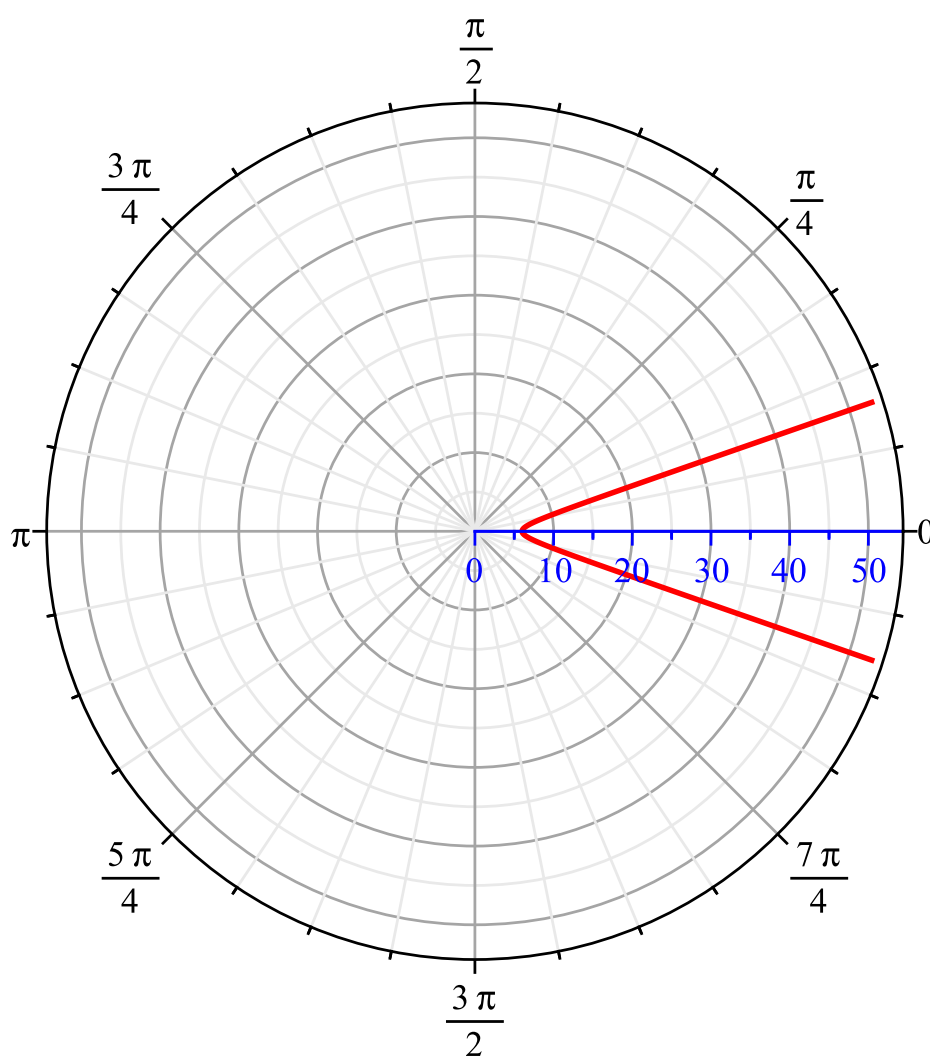


Рис. 8.1: 1. $\Delta > 0$, $\alpha > 0$, $\mathcal{E} > mc^2$.

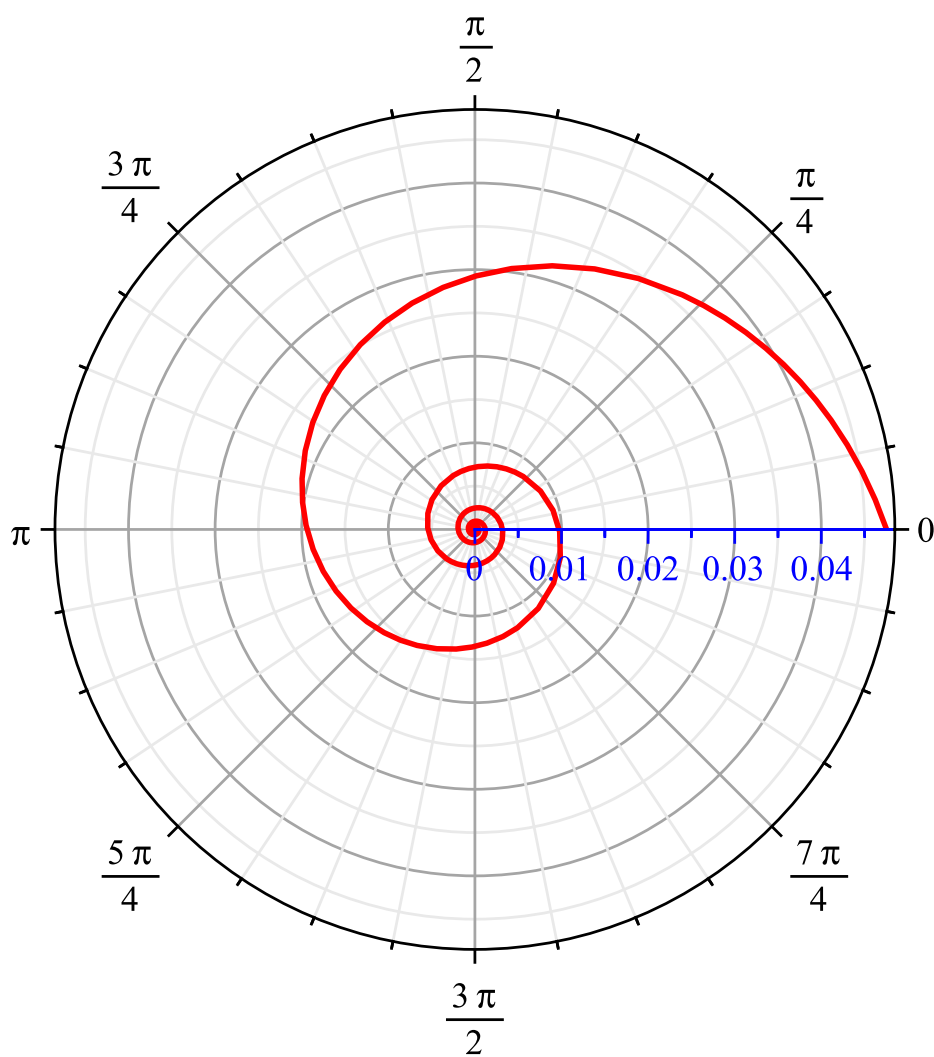


Рис. 8.2: 2. $\Delta > 0$, $\alpha < 0$, $\mathcal{E} > mc^2$.

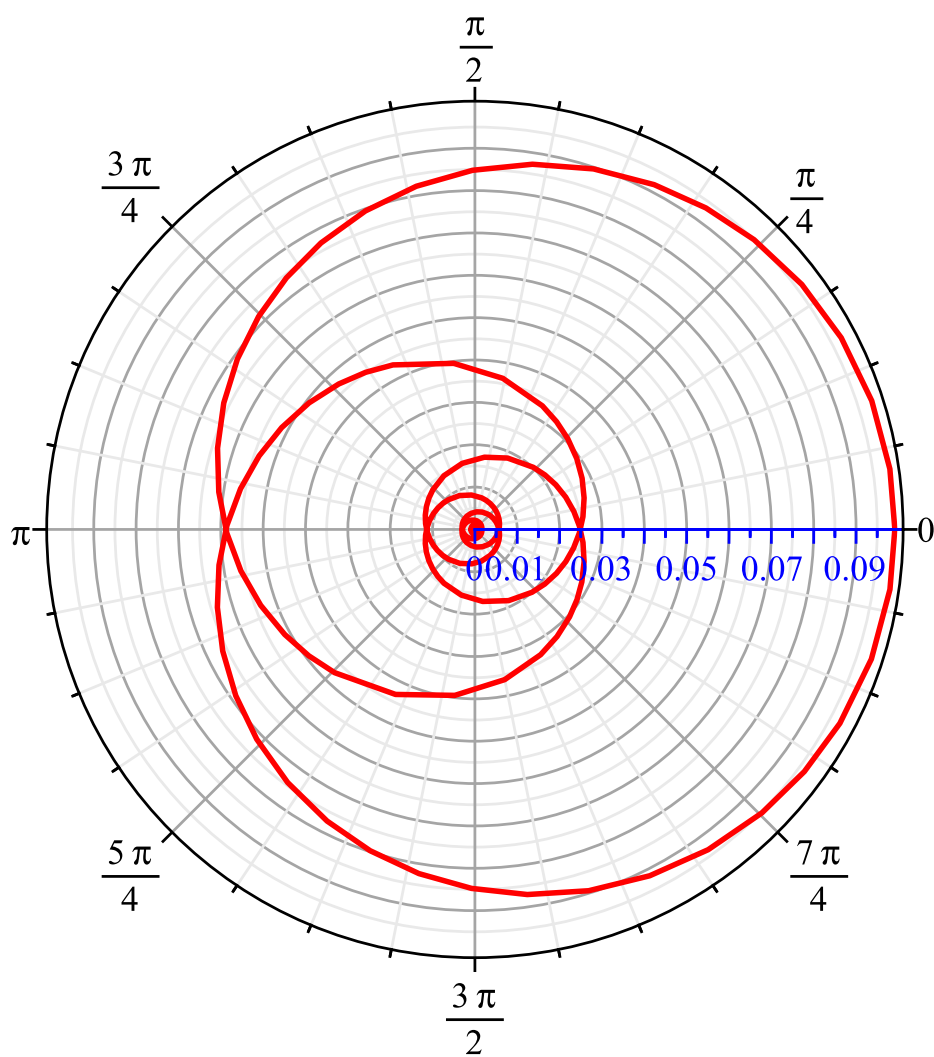


Рис. 8.3: 3. $\Delta > 0$, $\alpha < 0$, $\mathcal{E} < mc^2$.

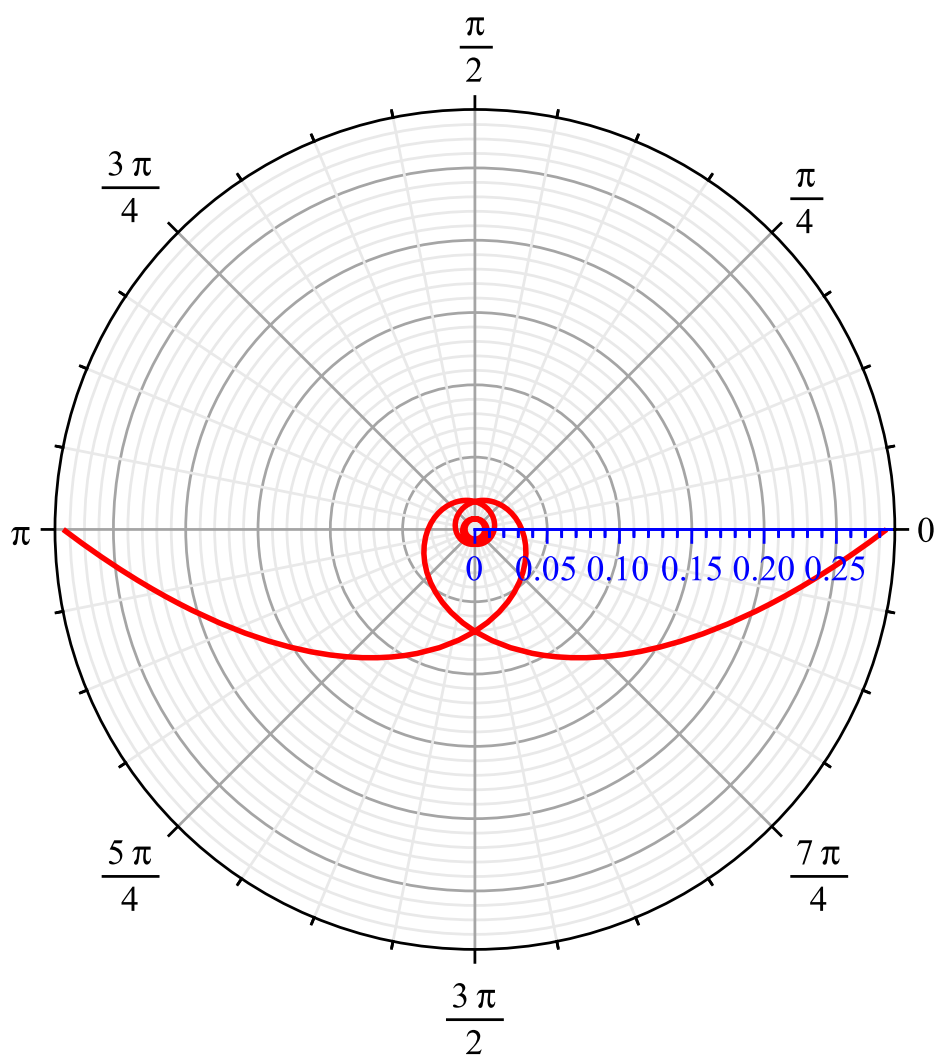


Рис. 8.4: 5. $\Delta < 0$, $\alpha < 0$, $\mathcal{E} > mc^2$.

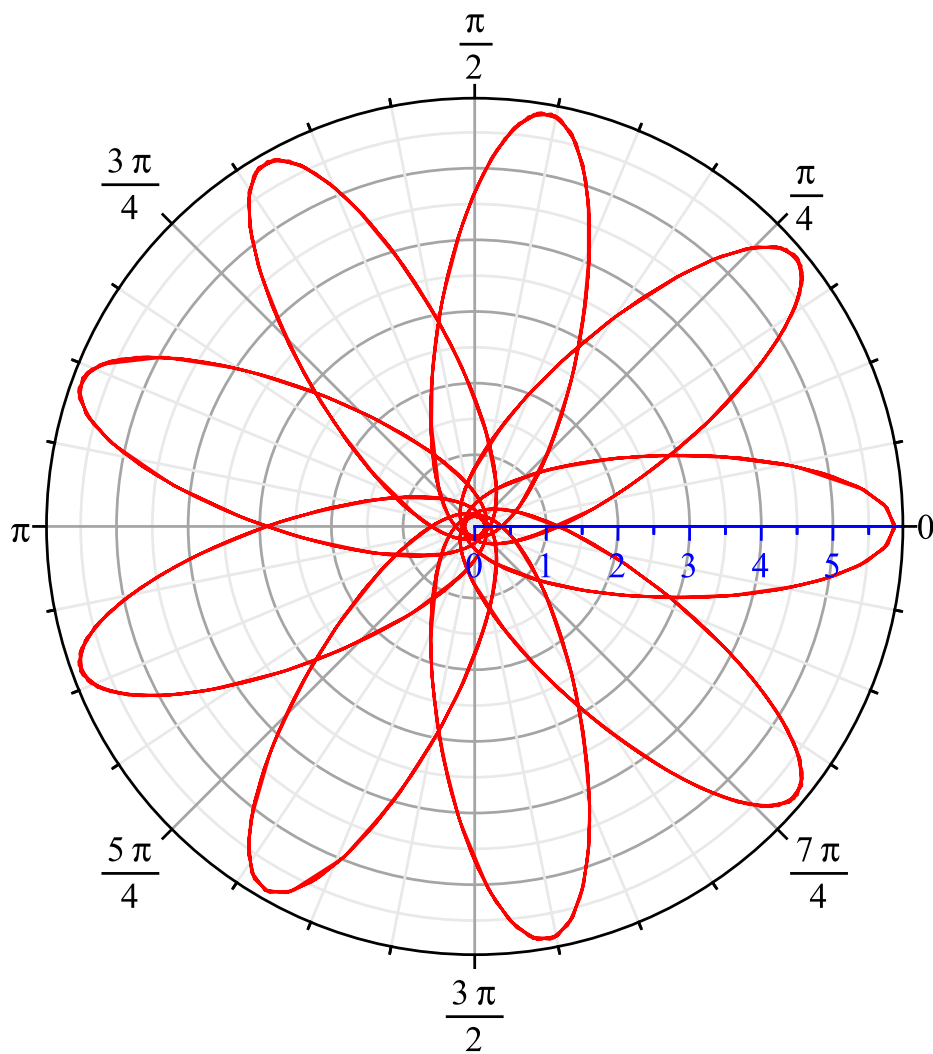


Рис. 8.5: 6. $\Delta < 0$, $\alpha < 0$, $\mathcal{E}_0 < \mathcal{E} < mc^2$.

8.5 Теорема Нетер

Мы выяснили, что в лагранжевом подходе уравнения движения могут быть получены как следствие условия стационарности действия

$$\delta S = 0, \quad (8.5.1)$$

а интеграл действия определяется функцией Лагранжа:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt. \quad (8.5.2)$$

Пусть существует гладкое преобразование координат и времени, зависящее от некоторого параметра α , такое, что

$$x'_i = x_i(x_j, t, \alpha), \quad x'_i(\alpha = 0) = x_i; \quad t' = t(x_j, t, \alpha), \quad t'(\alpha = 0) = t. \quad (8.5.3)$$

Будем считать, что действие инвариантно относительно такого преобразования, то есть

$$S' = \int_{t'_1}^{t'_2} L(x', \dot{x}', t') dt' = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt = S. \quad (8.5.4)$$

Рассмотрим инфинитезимальные (бесконечно малые) преобразования:

$$x'_i = x_i + \delta\alpha \left(\frac{dx_i}{d\alpha} \right) \Big|_{\alpha=0}, \quad t' = t + \delta\alpha \left(\frac{dt}{d\alpha} \right) \Big|_{\alpha=0}. \quad (8.5.5)$$

Вариация действия

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \right) dt + L d(\delta t) \right\}. \quad (8.5.6)$$

Очевидно, что

$$d(\delta t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dt}{d\alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} \delta\alpha dt. \quad (8.5.7)$$

В линейном приближении по $\delta\alpha$

$$\begin{aligned} \delta\dot{x}_i &= \frac{dx'_i}{dt'} - \frac{dx_i}{dt} = \frac{d\left(x_i + \left(\frac{dx_i}{d\alpha}\right)\Big|_{\alpha=0} \delta\alpha\right)}{d\left(t + \left(\frac{dt}{d\alpha}\right)\Big|_{\alpha=0} \delta\alpha\right)} - \frac{dx_i}{dt} = \\ &= \frac{\frac{dx_i}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{dx_i}{d\alpha}\right)\Big|_{\alpha=0} \delta\alpha}{1 + \frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{d\alpha}\right)\Big|_{\alpha=0} \delta\alpha} - \frac{dx_i}{dt} = \\ &= \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{dx_i}{d\alpha}\right)\Big|_{\alpha=0} - \dot{x}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{d\alpha}\right)\Big|_{\alpha=0} \right\} \delta\alpha. \end{aligned} \quad (8.5.8)$$

Поэтому вариационная производная действия имеет вид

$$\frac{\delta S}{\delta\alpha} = R(\alpha = 0), \quad (8.5.9)$$

где

$$\begin{aligned} R &= \frac{\partial L}{\partial x_i} \left(\frac{dx_i}{d\alpha}\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{dx_i}{d\alpha}\right) - \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{dt}{d\alpha}\right) \right] + \\ &\quad + \frac{\partial L}{\partial t} \left(\frac{dt}{d\alpha}\right) + L \frac{d}{dt} \left(\frac{dt}{d\alpha}\right). \end{aligned} \quad (8.5.10)$$

Преобразуем выражение (8.5.10), учитывая, что

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \dot{x}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i. \quad (8.5.11)$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} R &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{dx_i}{d\alpha}\right) - \left[\dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L \right] \left(\frac{dt}{d\alpha}\right) \right\} + \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) \right\} \left[\left(\frac{dx_i}{d\alpha}\right) - \dot{x}_i \left(\frac{dt}{d\alpha}\right) \right]. \end{aligned} \quad (8.5.12)$$

Если ввести стандартные обозначения для функции Гамильтона и канонических импульсов

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = P_i, \quad \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L = H, \quad (8.5.13)$$

то для реального движения частицы, которое описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0, \quad (8.5.14)$$

получаем условие инвариантности действия, которое для инфинитезимальных преобразований сводится к условию стационарности:

$$\frac{\delta S}{\delta \alpha} = \frac{d}{dt} \left\{ P_i \left(\frac{dx_i}{d\alpha} \right) - H \left(\frac{dt}{d\alpha} \right) \right\} \Big|_{\alpha=0} = 0. \quad (8.5.15)$$

Из соотношения (8.5.15) следует, что

$$P_i \left(\frac{dx_i}{d\alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} - H \left(\frac{dt}{d\alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} = \text{const}. \quad (8.5.16)$$

Или, в четырехмерном виде, используя декартовы координаты,

$$P_\mu \left(\frac{dx^\mu}{d\alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} = \text{const}. \quad (8.5.17)$$

Таким образом, мы доказали теорему Нетер, которую можно сформулировать следующим образом. Пусть действие инвариантно относительно однопараметрической подгруппы некоторой группы Ли, задающей преобразование координат и времени. Тогда существует интеграл движения, определяемый формулой (8.5.16). Эта теорема устанавливает связь между симметрией системы и ее интегралами движения.

Рассмотрим простые примеры. Пусть уравнение Гамильтона–Якоби не зависит от времени явно. Тогда

$$t \rightarrow t + \alpha; \quad \frac{dx_i}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dt}{d\alpha} = 1. \quad (8.5.18)$$

Интеграл движения — энергия (функция Гамильтона H).

Предположим, что имеет место трансляционная инвариантность относительно какой-нибудь координаты (например, по первой оси).

$$x_1 \rightarrow x_1 + \alpha; \quad \frac{dx_1}{d\alpha} = 1, \quad \frac{dt}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dx_2}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dx_3}{d\alpha} = 0. \quad (8.5.19)$$

Интеграл движения — соответствующий канонический импульс P_1 .

Пусть система обладает аксиальной симметрией (например, относительно третьей оси). Тогда

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha, & x_2 &\rightarrow x_2 \cos \alpha + x_1 \sin \alpha; \\ \frac{dx_3}{d\alpha} &= 0, & \frac{dt}{d\alpha} &= 0, & \frac{dx_1}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} &= -x_2, & \frac{dx_2}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} &= x_1. \end{aligned} \quad (8.5.20)$$

Интеграл движения — проекция углового момента на третью ось $L_3 = x_1 P_2 - x_2 P_1$.

Необходимо отметить, что формула (8.5.17) дает правильные выражения для интегралов движения тогда, когда интересующей нас симметрией обладают не только электромагнитные поля, но и обобщенные канонические импульсы частицы, а с ними и потенциалы, выбранные для описания поля. Поскольку канонические импульсы не являются калибровочно-инвариантными величинами, то необходимая симметрия может быть достигнута за счет калибровочного преобразования.

8.6 Движение частицы в плосковолновом поле

Рассмотрим задачу о движении релятивистской заряженной частицы с массой m и зарядом e в поле плоской электромагнитной волны⁵. Напомним основные свойства поля плоской волны. В волне инварианты поля равны нулю, то есть

$$\mathbf{E}^2 = \mathbf{B}^2, \quad (\mathbf{E}\mathbf{B}) = 0. \quad (8.6.1)$$

⁵По-видимому, впервые эта задача была решена еще в первом издании книги: Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, М.-Л., Гостехиздат (1941). Там для ее решения был использован метод Гамильтона–Якоби. Решение задачи с использованием прямого интегрирования по собственному времени приведено в книге: V. G. Bagrov, D. M. Gitman, *Exact solutions of relativistic wave equations*, Dordrecht–Boston–London, Kluwer Academic Publishers (1990). См. также Б. М. Болотовский, А. В. Серов, УФН, **173**, 68 (2003); С. Н. Андреев, В. П. Макаров, А. А. Рухадзе, *Квантовая электроника*, **39**, № 1, 68 (2009).

Пусть \mathbf{n} — направление распространения волны. Тогда

$$(\mathbf{E}\mathbf{n}) = 0, \quad \mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]. \quad (8.6.2)$$

Следовательно, векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} всегда лежат в одной и той же плоскости. Поэтому можно выбрать 4-потенциал поля так, чтобы он имел только две линейно независимые пространственные компоненты. Эти компоненты должны быть ортогональны вектору \mathbf{n} . Для записи 4-потенциала в явно ковариантном виде введем базис нулевой плоскости в пространстве Минковского (см. приложение **A.2**)

$$n^\mu = \{1, \mathbf{n}\}, \quad n_+^\mu = \frac{1}{2}\{1, -\mathbf{n}\}, \quad a_1^\mu = \{0, \mathbf{a}_1\}, \quad a_2^\mu = \{0, \mathbf{a}_2\}. \quad (8.6.3)$$

Заметим, что в соответствии с (A.2.10)

$$n^2 = n_+^2 = (a_1 a_2) = 0, \quad (n_+ n) = 1, \quad a_i^2 = -1; \quad i = 1, 2. \quad (8.6.4)$$

Выражение для 4-потенциала записывается следующим образом:

$$A^\mu = A^{(1)} a_1^\mu + A^{(2)} a_2^\mu. \quad (8.6.5)$$

Здесь $A^{(i)} \equiv A^{(i)}(x_-)$, где $x_- = (nx)$. Очевидно, что

$$(nA) = (n_+ A) = 0, \quad (8.6.6)$$

вследствие чего удовлетворяется условие Лоренца

$$(\partial A) = 0. \quad (8.6.7)$$

Запишем тензор поля

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (8.6.8)$$

Выражение для $\partial^\mu A^\nu$ можно переписать в виде

$$\partial^\mu A^\nu = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} = \frac{dA^\nu}{d(nx)} \frac{\partial(nx)}{\partial x_\mu} = n^\mu A^{\nu'}, \quad (8.6.9)$$

где штрихом обозначена производная по $x_- = (nx)$. Таким образом,

$$F^{\mu\nu} = n^\mu A'^\nu - n^\nu A'^\mu. \quad (8.6.10)$$

Мы выбрали выражение для 4-потенциала так, что оно не зависит от $(a_i x)$, $(n_+ x)$. Поэтому, в силу теоремы Нетер, при движении заряженной частицы в поле волны проекции канонического импульса $P^\mu = p^\mu + \frac{e}{c} A^\mu$ на орты a_i^μ , n^μ должны сохраняться, то есть

$$(a_i P) = \text{const}, \quad (nP) = (np) = \text{const}. \quad (8.6.11)$$

Здесь p^μ — кинетический 4-импульс, связанный с 4-скоростью соотношением

$$p^\mu = m c u^\mu. \quad (8.6.12)$$

Запишем уравнение Лоренца для частицы с зарядом e и массой m

$$\dot{u}^\mu = \frac{e}{m c} F^{\mu\nu} u_\nu,$$

где точкой обозначена производная по собственному времени τ . Подставив в него выражение (8.6.10), получаем уравнение, описывающее движение заряда в плосковолновом поле:

$$\dot{u}^\mu = \frac{e}{m c} (n^\mu A'_\nu - n_\nu A'^\mu) u^\nu. \quad (8.6.13)$$

Из соотношений (8.6.11), (8.6.12) следует, что

$$(nu) = (nu_0) = \text{const}, \quad (n\dot{x}) = c(nu_0) \rightarrow (nx) = c(nu_0)\tau. \quad (8.6.14)$$

Здесь и далее нижний индекс «0» будет обозначать значение величины в момент времени τ_0 . Поэтому в уравнении (8.6.13) производные по собственному времени τ связаны с производными по переменной $x_- = (nx)$:

$$\frac{d}{dx_-} \leftrightarrow \frac{1}{c(nu_0)} \frac{d}{d\tau}. \quad (8.6.15)$$

Следовательно,

$$\dot{u}^\mu = \frac{e}{mc^2} \left[\frac{n^\mu (\dot{A}u)}{(nu_0)} - \dot{A}^\mu \right]. \quad (8.6.16)$$

Перепишем это уравнение, используя канонический импульс:

$$\dot{P}^\mu = \dot{p}^\mu + \frac{e}{c} \dot{A}^\mu = n^\mu \frac{e}{cp_-} (\dot{A}p) = n^\mu \frac{e}{cp_-} \left(\dot{A} \left(P - \frac{e}{c} A \right) \right), \quad (8.6.17)$$

где

$$p_- = (np) = (np_0) = \text{const.} \quad (8.6.18)$$

Так как в силу (8.6.11)

$$(\dot{A}P) = (\dot{A}P_0) = (\dot{A}p_0) + \frac{e}{c} (\dot{A}A_0), \quad (8.6.19)$$

то

$$\dot{p}^\mu = -\frac{e}{c} \dot{A}^\mu + n^\mu \frac{e}{cp_-} \left[(\dot{A}p_0) - \frac{e}{c} (\dot{A}(A - A_0)) \right]. \quad (8.6.20)$$

Уравнение (8.6.20) элементарно интегрируется. В результате получаем

$$p^\mu = p_0^\mu - \frac{e}{c} (A^\mu - A_0^\mu) + n^\mu \frac{e}{cp_-} \left[\left((A - A_0) \left(p_0 + \frac{e}{c} A_0 \right) \right) - \frac{e}{2c} (A^2 - A_0^2) \right]. \quad (8.6.21)$$

После очевидных преобразований (8.6.21) приводится к виду

$$p^\mu = p_0^\mu - \frac{e}{c} (A^\mu - A_0^\mu) + n^\mu \frac{e}{cp_-} \left[((A - A_0)p_0) - \frac{e}{2c} (A - A_0)^2 \right]. \quad (8.6.22)$$

Формулы (8.6.21), (8.6.22) определяют зависимость импульса частицы от ее собственного времени.

Вследствие (8.6.15) имеем

$$p^\mu = p_- \frac{dx^\mu}{dx_-}. \quad (8.6.23)$$

Поэтому

$$x^\mu - x_0^\mu = \int_{x_{0-}}^{x_-} \left\{ \left(p_0^\mu + \frac{e}{c} A_0^\mu \right) - \frac{e}{c} A^\mu + \right. \\ \left. + n^\mu \frac{e}{cp_-} \left[\left((A - A_0) \left(p_0 + \frac{e}{c} A_0 \right) \right) - \frac{e}{2c} (A^2 - A_0^2) \right] \right\} \frac{dx_-}{p_-}. \quad (8.6.24)$$

Соотношение (8.6.24) определяет в параметрической форме закон движения заряженной частицы в плосковолновом поле.

К сожалению, даже если интеграл в (8.6.24) выражается через элементарные функции, в общем случае для нахождения закона движения частицы в лабораторной системе отсчета возникает сложное трансцендентное уравнение, решение которого можно получить только используя численные методы⁶.

В качестве примера рассмотрим движение заряженной частицы в поле монохроматической плоской волны циркулярной поляризации (см. раздел 6.7). Хотя это, по-видимому, наиболее простая задача, даже она допускает полное аналитическое решение только при определенном выборе начальных условий.

Для наглядности будем считать, что волна распространяется вдоль третьей оси координатной системы. Это позволит нам использовать «естественные» индексы для координат пространства событий и компонент импульса. Без ограничения общности положим $x_0^\mu = 0$, то есть предположим, что в момент времени $t = 0$ частица находилась в начале координат.

Выберем компоненты 4-потенциала в виде

$$A^{(1)} = g \frac{Ec}{\omega} \cos(\omega x_- / c), \quad A^{(2)} = \frac{Ec}{\omega} \sin(\omega x_- / c), \quad (8.6.25)$$

⁶Некоторые характерные особенности движения частицы в плосковолновом поле рассмотрены в цитированной литературе.

где E — амплитуда поля волны, ω — циклическая частота волны, выбор знака $g = \pm 1$ определяет тип поляризации волны ($g = 1$ соответствует правовинтовому вращению векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} , а $g = -1$ — левовинтовому). Очевидно, что

$$\begin{aligned} \frac{dA^{(1)}}{dx_-} &= -gE \sin(\omega x_-/c), & \int_0^{x_-} A^{(1)} dx_- &= g \frac{Ec^2}{\omega^2} \sin(\omega x_-/c), \\ \frac{dA^{(2)}}{dx_-} &= E \cos(\omega x_-/c), & \int_0^{x_-} A^{(2)} dx_- &= \frac{Ec^2}{\omega^2} (1 - \cos(\omega x_-/c)). \end{aligned} \quad (8.6.26)$$

Рассмотрим движение с начальными условиями

$$p^1 + \frac{e}{c} A^{(1)} = p_0^1 + \frac{e}{c} A_0^{(1)} = 0, \quad (8.6.27)$$

$$p^2 + \frac{e}{c} A^{(2)} = p_0^2 + \frac{e}{c} A_0^{(2)} = 0, \quad (8.6.28)$$

то есть будем считать, что проекции канонического импульса на направления, перпендикулярные направлению распространения волны, равны нулю. Именно это допущение позволяет получить закон движения частицы в лабораторной системе отсчета в явном виде. В этом случае выражение для импульса частицы (8.6.21) сильно упрощается. Для наглядности запишем его в компонентах:

$$p^0 + p^3 = p_0^0 + p_0^3 + \frac{e^2}{c^2 p_-} \left[(A^{(1)})^2 + (A^{(2)})^2 - (A_0^{(1)})^2 - (A_0^{(2)})^2 \right], \quad (8.6.29)$$

$$p^1 = -\frac{e}{c} A^{(1)}, \quad (8.6.30)$$

$$p^2 = -\frac{e}{c} A^{(2)}. \quad (8.6.31)$$

Напомним, что компоненты кинетического 4-импульса

$$p^\mu = \left\{ \frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right\}$$

не являются независимыми, а связаны соотношением

$$(p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = m^2 c^2. \quad (8.6.32)$$

Аналогичное соотношение имеет место и для начальных условий:

$$(p_0^0)^2 - (p_0^1)^2 - (p_0^2)^2 - (p_0^3)^2 = m^2 c^2. \quad (8.6.33)$$

Учитывая (8.6.27), (8.6.28) и (8.6.18), формулы (8.6.32) и (8.6.33) можно записать следующим образом:

$$p^0 + p^3 = \frac{m^2 c^2}{p_-} + \frac{e^2}{c^2 p_-} \left((A^{(1)})^2 + (A^{(2)})^2 \right), \quad (8.6.34)$$

$$p_0^0 + p_0^3 = \frac{m^2 c^2}{p_-} + \frac{e^2}{c^2 p_-} \left((A_0^{(1)})^2 + (A_0^{(2)})^2 \right). \quad (8.6.35)$$

Обратим внимание на то, что соотношение (8.6.29) является следствием условий (8.6.34) и (8.6.35).

Для волны циркулярной поляризации

$$(A^{(1)})^2 + (A^{(2)})^2 = \frac{E^2 c^2}{\omega^2} = \text{const}. \quad (8.6.36)$$

Поэтому из формулы (8.6.34) следует, что не только $p^0 - p^3 = \text{const}$, но и $p^0 + p^3 = \text{const}$. То есть энергия частицы p^0 и проекция кинетического импульса на направление распространения волны p^3 являются интегралами движения, причем

$$p^0 = \sqrt{m^2 c^2 (1 + \xi^2) + (p^3)^2}. \quad (8.6.37)$$

Таким образом, имеет место дрейф частицы вдоль направления распространения волны со скоростью

$$\beta_{dr} = \frac{p^3}{p^0} = \frac{p^3}{\sqrt{m^2 c^2 (1 + \xi^2) + (p^3)^2}} = \text{const}. \quad (8.6.38)$$

Здесь мы ввели безразмерный параметр $\xi = \frac{eE}{m\omega c}$. Смысл этого параметра очевиден: с точностью до 2π это работа электрического поля на длине волны $\lambda = 2\pi c/\omega$, отнесенная к энергии покоя частицы. Очевидно, что

$$x^3 = \beta_{dr}x^0, \quad x_- = (1 - \beta_{dr})x^0 = (1 - \beta_{dr})ct. \quad (8.6.39)$$

Из формулы (8.6.24) следует закон движения частицы в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны (см. (8.6.26)):

$$\begin{aligned} x^1 &= -\frac{e}{cp_-} \int_0^{x_-} A^{(1)} dx_- = -g \frac{eEc}{\omega^2 p_-} \sin(\omega x_-/c) = \\ &= -g \frac{mc^2 \xi}{\omega p^0 (1 - \beta_{dr})} \sin(\omega(1 - \beta_{dr})t), \\ x^2 &= -\frac{e}{cp_-} \int_0^{x_-} A^{(1)} dx_- = \frac{eEc}{\omega^2 p_-} (\cos(\omega x_-/c) - 1) = \\ &= \frac{mc^2 \xi}{\omega p^0 (1 - \beta_{dr})} (\cos(\omega(1 - \beta_{dr})t) - 1). \end{aligned} \quad (8.6.40)$$

Следовательно, частица движется по винтовой линии, имеющей радиус

$$R = \frac{mc^2 \xi}{\omega p^0 (1 - \beta_{dr})}. \quad (8.6.41)$$

Частота обращения равна

$$\omega' = \omega(1 - \beta_{dr}). \quad (8.6.42)$$

Если $\beta_{dr} = 0$, то движение происходит по окружности, имеющей радиус

$$R = \frac{c\xi}{\omega \sqrt{1 + \xi^2}}. \quad (8.6.43)$$

Продифференцировав (8.6.40) по времени, получаем величину орбитальной скорости

$$\beta_{orb} = \frac{mc\xi}{p^0}. \quad (8.6.44)$$

Если $\beta_{dr} = 0$, то

$$\beta_{orb} = \frac{\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}}. \quad (8.6.45)$$

Заметим, что

$$\beta_{orb}^2 + \beta_{dr}^2 = \frac{(p_0^3)^2 + \xi^2 m^2 c^2}{(p_0^3)^2 + m^2 c^2 (1 + \xi^2)} = 1 - \frac{m^2 c^2}{(p_0^3)^2 + m^2 c^2 (1 + \xi^2)} < 1, \quad (8.6.46)$$

то есть, как и следовало ожидать, скорость движения частицы всегда меньше скорости света.

Подведем итоги. В поле циркулярно поляризованной плоской волны с начальными условиями (8.6.27), (8.6.28) имеют место дрейф с постоянной скоростью вдоль направления распространения волны и вращение частицы в плоскости, перпендикулярной этому направлению. Скорость дрейфа определяется отношением сохраняющихся величин: составляющей импульса вдоль направления распространения волны и энергии частицы. Частота вращения частицы и ее орбитальная скорость *уменьшаются* при увеличении скорости дрейфа, а радиус орбиты *увеличивается*.

Проведенный анализ поведения заряженной частицы в поле волны подразумевал стационарность движения, то есть мы считали, что частица находится в поле достаточно долго. Поэтому мы рассматривали начальные условия, отвечающие *установившемуся* движению. Однако более интересно рассмотреть воздействие на частицу импульсного поля. Если считать, что длительность импульса велика по сравнению с обратной частотой волны, то модель монохроматической волны для описания такого процесса вполне адекватна.

Будем считать (для наглядности), что в начальный момент времени (до прихода волны) частица покоится, то есть ее начальный кинетический 4-импульс определяется выражением

$$p_0^\mu = \{mc, \mathbf{0}\}. \quad (8.6.47)$$

Поэтому, вследствие соотношений (8.6.27), (8.6.28), начальный векторный потенциал поля равен нулю: $A_0^\mu = 0$.

Так как при этом

$$p_- = p^0 - p^3 = p_0^0 - p_0^3 = mc, \quad (8.6.48)$$

и, с учетом уже введенных обозначений, соотношение (8.6.29) принимает вид

$$p^0 + p^3 = mc(1 + \xi^2), \quad (8.6.49)$$

то

$$p^0 = mc(1 + \xi^2/2), \quad p^3 = mc\xi^2/2. \quad (8.6.50)$$

Следовательно, поле волны вызывает дрейф частицы с постоянной скоростью

$$\beta_{dr} = \frac{p^3}{p^0} = \frac{\xi^2/2}{1 + \xi^2/2}. \quad (8.6.51)$$

При этом закон движения частицы в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, определяется формулами (8.6.40), в которые необходимо подставить значение дрейфовой скорости, определяемое соотношением (8.6.51), и $p^0 = mc(1 + \xi^2/2)$. В результате находим, что частица движется по винтовой линии, имеющей радиус

$$R = \frac{c\xi}{\omega}. \quad (8.6.52)$$

Частота обращения равна

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \xi^2/2}. \quad (8.6.53)$$

Величина орбитальной скорости

$$\beta_{orb} = \frac{\xi}{1 + \xi^2/2}. \quad (8.6.54)$$

Таким образом, волна захватывает частицу, имевшую в начальный момент времени нулевую скорость, причем характер движения частицы существенно зависит от параметра ξ , характеризующего интенсивность волны. Так как отношение скорости дрейфа к орбитальной скорости

$$\frac{\beta_{dr}}{\beta_{orb}} = \frac{\xi}{2}, \quad (8.6.55)$$

то при $\xi \ll 1$ основную роль играет вращение частицы в поле, а при $\xi \gg 1$ — дрейф вдоль направления распространения волны. После прохождения импульса поля частица вновь останавливается. То есть волна ускоряет частицу передним фронтом и останавливает задним. В результате частица перемещается на некоторое расстояние L . Оценим это расстояние. Пусть длительность импульса равна T . Сравнивая скорость дрейфа частицы со скоростью света, получаем:

$$L = \frac{\beta_{dr}}{1 - \beta_{dr}} cT = \frac{\xi^2}{2} cT. \quad (8.6.56)$$

Ясно, что для мощных импульсов эффект может быть весьма существенным. Зная характеристики источников излучения, несложно получить для него численные оценки.

Приложение А

А.1 Основные обозначения и определения

Четырехмерные тензорные индексы обозначаются греческими буквами $\alpha, \beta, \dots, \mu, \nu, \dots$ и принимают значения 0, 1, 2, 3.

Компоненты 4-вектора перечисляются так:

$$a^\mu = \{a^0, \mathbf{a}\}, \quad a_\mu \equiv g_{\mu\nu}a^\nu = \{a^0, -\mathbf{a}\}. \quad (\text{A.1.1})$$

Метрический тензор:

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (\text{A.1.2})$$

Антисимметричный единичный тензор $e^{\mu\nu\rho\lambda}$ нормирован условием:

$$e^{0123} = 1. \quad (\text{A.1.3})$$

Свертки антисимметричного тензора:

$$\begin{aligned} e^{\mu\nu\rho\lambda}e_{\mu\nu\rho\lambda} &= -24, \\ e^{\mu\nu\rho\lambda}e_{\mu\nu\rho\alpha} &= -6\delta_\alpha^\lambda, \\ e^{\mu\nu\rho\lambda}e_{\mu\nu\alpha\beta} &= -2[\delta_\alpha^\rho\delta_\beta^\lambda - \delta_\beta^\rho\delta_\alpha^\lambda], \\ e^{\mu\nu\rho\lambda}e_{\mu\alpha\beta\gamma} &= -\delta_\alpha^\nu[\delta_\beta^\rho\delta_\gamma^\lambda - \delta_\gamma^\rho\delta_\beta^\lambda] + \\ &+ \delta_\beta^\nu[\delta_\alpha^\rho\delta_\gamma^\lambda - \delta_\gamma^\rho\delta_\alpha^\lambda] - \delta_\gamma^\nu[\delta_\alpha^\rho\delta_\beta^\lambda - \delta_\beta^\rho\delta_\alpha^\lambda]. \end{aligned} \quad (\text{A.1.4})$$

Двумерный антисимметричный тензор ε_{ij} нормирован условием

$$\varepsilon_{12} = 1. \quad (\text{A.1.5})$$

А.2 Базисы в пространстве Минковского

Стандартный базис e_i^μ :

$$e_0^\mu = \{1, \mathbf{0}\}, \quad e_i^\mu = \{0, \mathbf{e}_i\}. \quad (\text{A.2.1})$$

Канонический базис L_i^μ :

$$L_0^\mu = u^\mu, \quad L_i^\mu = \left\{ (\mathbf{u}\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_i + \frac{(\mathbf{u}\mathbf{e}_i)\mathbf{u}}{1 + u^0} \right\} \quad (\text{A.2.2})$$

— преобразованный без поворота осей в лабораторную систему базис e_i^μ .

Матрица этого преобразования:

$$L = \begin{pmatrix} u^0 & u^1 & u^2 & u^3 \\ u^1 & 1 + \frac{u^1 u^1}{1 + u^0} & \frac{u^1 u^2}{1 + u^0} & \frac{u^1 u^3}{1 + u^0} \\ u^2 & \frac{u^2 u^1}{1 + u^0} & 1 + \frac{u^2 u^2}{1 + u^0} & \frac{u^2 u^3}{1 + u^0} \\ u^3 & \frac{u^3 u^1}{1 + u^0} & \frac{u^3 u^2}{1 + u^0} & 1 + \frac{u^3 u^3}{1 + u^0} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.3})$$

Матрица обратного преобразования L^{-1} получается заменой $\mathbf{u} \rightarrow -\mathbf{u}$.

Базис плосковолнового поля Λ_i^μ :

$$\Lambda_0^\mu = u^\mu, \quad \Lambda_{1,2}^\mu = a_{1,2}^\mu - n^\mu \frac{(a_{1,2} u)}{(nu)}, \quad \Lambda_3^\mu = \frac{n^\mu}{(nu)} - u^\mu \quad (\text{A.2.4})$$

— преобразованный с поворотом осей в лабораторную систему базис e_i^μ .

Матрица этого преобразования:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} u^0 & \frac{u^1}{u_-} & \frac{u^2}{u_-} & \frac{1}{u_-} & -u^0 \\ u^1 & 1 & 0 & -u^1 \\ u^2 & 0 & 1 & -u^2 \\ u^3 & \frac{u^1}{u_-} & \frac{u^2}{u_-} & \frac{1}{u_-} & -u^3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.5})$$

Базис однородного поля N_i^μ :

$$\begin{aligned} N_0^\mu &= u^\mu, & N_1^\mu &= [a_2^\mu(a_1u) - a_1^\mu(a_2u)] u_\perp^{-1}, \\ N_2^\mu &= \left[u^\mu u_\perp - a_1^\mu \frac{(a_1u)}{u_\perp} - a_2^\mu \frac{(a_2u)}{u_\perp} \right] (1 + u_\perp^2)^{-1/2}, \\ N_3^\mu &= [n^\mu(n_+u) - n_+^\mu(nu)] (1 + u_\perp^2)^{-1/2} \end{aligned} \quad (\text{A.2.6})$$

— преобразованный с поворотом осей в лабораторную систему базис e_i^μ .

Матрица этого преобразования:

$$N = \begin{pmatrix} u^0 & 0 & \frac{u^0 u_\perp}{\sqrt{1 + u_\perp^2}} & \frac{u^3}{\sqrt{1 + u_\perp^2}} \\ u^1 & \frac{u^2}{u_\perp} & \frac{u^1}{u_\perp} \sqrt{1 + u_\perp^2} & 0 \\ u^2 & -\frac{u^1}{u_\perp} & \frac{u^2}{u_\perp} \sqrt{1 + u_\perp^2} & 0 \\ u^3 & 0 & \frac{u^3 u_\perp}{\sqrt{1 + u_\perp^2}} & \frac{u^0}{\sqrt{1 + u_\perp^2}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.7})$$

Для любого ортогонального базиса, полученного из стандартного преобразованием Лоренца, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} n_i^\mu n_{j\mu} &= g_{ij}, & g^{ij} n_i^\mu n_j^\nu &= g^{\mu\nu}, \\ e^{\mu\nu\rho\lambda} n_{i\mu} n_{j\nu} n_{k\rho} n_{l\lambda} &= \Delta e_{ijkl}, & e^{ijkl} n_{i\mu} n_{j\nu} n_{k\rho} n_{l\lambda} &= \Delta e_{\mu\nu\rho\lambda}, \\ \Delta &= \text{Det} |n_0^\mu n_1^\nu n_2^\rho n_3^\lambda| = -\frac{1}{4!} e_{\mu\nu\rho\lambda} e^{ijkl} n_i^\mu n_j^\nu n_k^\rho n_l^\lambda. \end{aligned} \quad (\text{A.2.8})$$

$$\begin{aligned}
 e^{\mu\nu\rho\lambda}n_{j\nu}n_{k\rho}n_{l\lambda} &= \Delta e_{ijkl}g^{im}n_m^\mu, & e^{ijkl}n_{j\nu}n_{k\rho}n_{l\lambda} &= \Delta e_{\mu\nu\rho\lambda}g^{im}n_m^\mu, \\
 e^{\mu\nu\rho\lambda}n_{k\rho}n_{l\lambda} &= \Delta e_{ijkl}g^{im}g^{jn}n_m^\mu n_n^\nu, & e^{ijkl}n_{k\rho}n_{l\lambda} &= \Delta e_{\mu\nu\rho\lambda}g^{im}g^{jn}n_m^\mu n_n^\nu, \\
 e^{\mu\nu\rho\lambda}n_{l\lambda} &= \Delta e_{ijkl}g^{im}g^{jn}g^{kp}n_m^\mu n_n^\nu n_p^\rho, & e^{ijkl}n_{l\lambda} &= \Delta e_{\mu\nu\rho\lambda}g^{im}g^{jn}g^{kp}n_m^\mu n_n^\nu n_p^\rho.
 \end{aligned} \tag{A.2.9}$$

Базис нулевой плоскости:

$$\begin{aligned}
 n^\mu &= (1, \mathbf{n}), \quad n_+^\mu = \frac{1}{2}(1, -\mathbf{n}), \quad a_1^\mu = (0, \mathbf{a}_1), \quad a_2^\mu = (0, \mathbf{a}_2). \\
 n^2 &= n_+^2 = (na_i) = (n_+a_i) = 0, \quad (nn_+) = 1, \quad (a_i a_j) = -\delta_{ij}, \\
 n^\mu n_+^\nu + n_+^\mu n^\nu - a_1^\mu a_1^\nu - a_2^\mu a_2^\nu &= g^{\mu\nu}.
 \end{aligned} \tag{A.2.10}$$

В базисе (А.2.10) произвольный вектор p^μ имеет вид

$$p^\mu = n^\mu p_+ + n_+^\mu p_- - a_i^\mu p_i, \tag{A.2.11}$$

где

$$p_- = (np), \quad p_+ = (n_+p), \quad p_i = (a_i p). \tag{A.2.12}$$

Если

$$\Delta_0 = \text{Det} |n_+^\mu n^\nu a_1^\rho a_2^\lambda| = -e_{\mu\nu\rho\lambda} n_+^\mu n^\nu a_1^\rho a_2^\lambda, \tag{A.2.13}$$

то

$$\begin{aligned}
 \Delta_0 e^{\mu\nu\rho\lambda} &= \\
 &= [n^\mu n_+^\nu - n_+^\mu n^\nu] [a_2^\rho a_1^\lambda - a_1^\rho a_2^\lambda] + [n^\rho n_+^\mu - n_+^\rho n^\mu] [a_2^\nu a_1^\lambda - a_1^\nu a_2^\lambda] + \\
 &+ [n^\mu n_+^\lambda - n_+^\mu n^\lambda] [a_2^\nu a_1^\rho - a_1^\nu a_2^\rho] + [n^\rho n_+^\lambda - n_+^\rho n^\lambda] [a_2^\mu a_1^\nu - a_1^\mu a_2^\nu] + \\
 &+ [n^\lambda n_+^\nu - n_+^\lambda n^\nu] [a_2^\mu a_1^\rho - a_1^\mu a_2^\rho] + [n^\nu n_+^\rho - n_+^\nu n^\rho] [a_2^\mu a_1^\lambda - a_1^\mu a_2^\lambda], \\
 &-\frac{1}{2}\Delta_0 e_{\mu\nu\rho\lambda} [n^\rho a_1^\lambda - a_1^\rho n^\lambda] = -[n_\mu a_{2\nu} - a_{2\mu} n_\nu], \\
 &-\frac{1}{2}\Delta_0 e_{\mu\nu\rho\lambda} [n^\rho a_2^\lambda - a_2^\rho n^\lambda] = [n_\mu a_{1\nu} - a_{1\mu} n_\nu], \\
 &-\frac{1}{2}\Delta_0 e_{\mu\nu\rho\lambda} [n^\rho n_+^\lambda - n_+^\rho n^\lambda] = [a_{2\mu} a_{1\nu} - a_{1\mu} a_{2\nu}], \\
 &-\frac{1}{2}\Delta_0 e_{\mu\nu\rho\lambda} [a_2^\rho a_1^\lambda - a_1^\rho a_2^\lambda] = -[n_\mu n_{+\nu} - n_{+\mu} n_\nu].
 \end{aligned} \tag{A.2.14}$$

(A.2.15)

А.3 Свойства антисимметричных тензоров

Перечисление компонент антисимметричного тензора:

$$\begin{aligned}
 A^{\mu\nu} = (\mathbf{p}, \mathbf{a}) &= \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ -p_1 & 0 & -a_3 & a_2 \\ -p_2 & a_3 & 0 & -a_1 \\ -p_3 & -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \\
 A_{\mu\nu} = (-\mathbf{p}, \mathbf{a}) &= \begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & 0 & -a_3 & a_2 \\ p_2 & a_3 & 0 & -a_1 \\ p_3 & -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \\
 A_{\mu}^{\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & 0 & a_3 & -a_2 \\ p_2 & -a_3 & 0 & a_1 \\ p_3 & a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix} \\
 A^{\mu}_{\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ -p_1 & 0 & a_3 & -a_2 \\ -p_2 & -a_3 & 0 & a_1 \\ -p_3 & a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.3.1}$$

Дуальный антисимметричный тензор:

$${}^*A^{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2} e^{\mu\nu\rho\lambda} A_{\rho\lambda}, \quad {}^{**}A^{\mu\nu} = -A^{\mu\nu}. \tag{A.3.2}$$

Перечисление компонент дуального антисимметричного тензора:

$$\begin{aligned}
 {}^*A^{\mu\nu} = (\mathbf{a}, -\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & 0 & p_3 & -p_2 \\ -a_2 & -p_3 & 0 & p_1 \\ -a_3 & p_2 & -p_1 & 0 \end{pmatrix} \\
 {}^*A_{\mu\nu} = (-\mathbf{a}, -\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & 0 & p_3 & -p_2 \\ a_2 & -p_3 & 0 & p_1 \\ a_3 & p_2 & -p_1 & 0 \end{pmatrix} \\
 {}^*A_{\mu}{}^{\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 0 & -p_3 & p_2 \\ a_2 & p_3 & 0 & -p_1 \\ a_3 & -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix} \\
 {}^*A^{\mu}{}_{\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ -a_1 & 0 & -p_3 & p_2 \\ -a_2 & p_3 & 0 & -p_1 \\ -a_3 & -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.3.3}$$

Инварианты антисимметричного тензора:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{4} A^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} {}^*A^{\mu\nu} {}^*A_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}^2 - \mathbf{p}^2), \\
 I_2 &= \frac{1}{4} {}^*A^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = -(\mathbf{p}\mathbf{a}).
 \end{aligned} \tag{A.3.4}$$

Определитель матрицы, задающей антисимметричный тензор:

$$\text{Det } A = -(\mathbf{pa})^2 = -I_2^2. \quad (\text{A.3.5})$$

Произведения антисимметричных тензоров:

$$A^{\mu\rho} A_{\rho}^{\nu} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}^2 & -[\mathbf{p} \times \mathbf{a}]_k \\ -[\mathbf{p} \times \mathbf{a}]_i & \delta_{ik} \mathbf{a}^2 - (p_i p_k + a_i a_k) \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.6})$$

$${}^*A^{\mu\rho} {}^*A_{\rho}^{\nu} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^2 & -[\mathbf{p} \times \mathbf{a}]_k \\ -[\mathbf{p} \times \mathbf{a}]_i & \delta_{ik} \mathbf{p}^2 - (p_i p_k + a_i a_k) \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.7})$$

$${}^*A^{\mu\lambda} A_{\lambda\nu} = \delta_{\nu}^{\mu} (\mathbf{pa}), \quad {}^*A^{\mu\lambda} {}^*A_{\lambda\nu} - A^{\mu\lambda} A_{\lambda\nu} = \delta_{\nu}^{\mu} (\mathbf{a}^2 - \mathbf{p}^2). \quad (\text{A.3.8})$$

$$A^{\mu}_{\rho} A^{\rho}_{\sigma} A^{\sigma\nu} = -A^{\mu\nu} (\mathbf{a}^2 - \mathbf{p}^2) + {}^*A^{\mu\nu} (\mathbf{pa}). \quad (\text{A.3.9})$$

$${}^*A^{\mu}_{\rho} {}^*A^{\rho}_{\sigma} {}^*A^{\sigma\nu} = {}^*A^{\mu\nu} (\mathbf{a}^2 - \mathbf{p}^2) + A^{\mu\nu} (\mathbf{pa}). \quad (\text{A.3.10})$$

$$A^{\mu\nu} A'_{\mu\nu} = 2((\mathbf{aa}') - (\mathbf{pp}')). \quad (\text{A.3.11})$$

Любой антисимметричный тензор можно представить в виде

$$A^{\mu\nu} = (a^{\mu} b^{\nu} - b^{\mu} a^{\nu}) + (c^{\mu} d^{\nu} - d^{\mu} c^{\nu}). \quad (\text{A.3.12})$$

Для любых 4-векторов $b^{\mu}, d^{\mu}, (bd) \neq 0$:

$$A^{\mu\nu} (bd) = -[b^{\mu} A^{\nu\rho} d_{\rho} - A^{\mu\rho} d_{\rho} b^{\nu}] + {}^*[d^{\mu} {}^*A^{\nu\rho} b_{\rho} - {}^*A^{\mu\rho} b_{\rho} d^{\nu}]. \quad (\text{A.3.13})$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} b_{\mu} {}^*A^{\mu}_{\rho} {}^*A^{\rho}_{\nu} b^{\nu} d^2 + (b_{\mu} {}^*A^{\mu}_{\nu} d^{\nu})^2 - d_{\mu} A^{\mu}_{\rho} A^{\rho}_{\nu} d^{\nu} b^2 - (b_{\mu} A^{\mu}_{\nu} d^{\nu})^2 = \\ = b_{\mu} {}^*A^{\mu}_{\rho} {}^*A^{\rho}_{\nu} d^{\nu} (bd) - b_{\mu} A^{\mu}_{\rho} A^{\rho}_{\nu} d^{\nu} (bd) = 2(bd)^2 I_1. \end{aligned} \quad (\text{A.3.14})$$

Если

$$A^{\mu\nu} = a^{\mu} b^{\nu} - b^{\mu} a^{\nu}, \quad (\text{A.3.15})$$

то тензор называется плоским. Чтобы тензор был плоским, необходимо и достаточно выполнения условия

$$I_2 = 0. \quad (\text{A.3.16})$$

Характеристическое уравнение для определения собственных значений антисимметричного тензора:

$$\lambda^4 + 2I_1\lambda^2 - I_2^2 = 0. \quad (\text{A.3.17})$$

Собственные значения:

$$\lambda_{1,2} = \pm p, \quad \lambda_{3,4} = \pm ia, \quad (\text{A.3.18})$$

где

$$p = \left[(I_1^2 + I_2^2)^{1/2} - I_1 \right]^{1/2}, \quad a = \left[(I_1^2 + I_2^2)^{1/2} + I_1 \right]^{1/2}. \quad (\text{A.3.19})$$

При этом

$$pa = |(\mathbf{pa})|, \quad a^2 - p^2 = \mathbf{a}^2 - \mathbf{p}^2. \quad (\text{A.3.20})$$

Следовательно, плоский тензор имеет, как минимум, два нулевых собственных значения. И обратно: если антисимметричный тензор имеет нулевые собственные значения, то он плоский.

Уравнения для собственных векторов $X_i^\mu = \{X_i^0, \mathbf{X}_i\}$:

$$(\mathbf{p}\mathbf{X}_i) = -\lambda_i X_i^0, \quad \mathbf{p}X_i^0 + [\mathbf{a} \times \mathbf{X}_i] = -\lambda_i \mathbf{X}_i. \quad (\text{A.3.21})$$

Собственные векторы:

$$\mathbf{X}_i = -\frac{X_i^0}{\lambda_i^2 + \mathbf{a}^2} \left[\lambda_i \mathbf{p} + \frac{(\mathbf{pa})\mathbf{a}}{\lambda_i} + [\mathbf{p} \times \mathbf{a}] \right]. \quad (\text{A.3.22})$$

$$\mathbf{X}_{1,2} = -X_+^{-1} \{ [\mathbf{p} \times \mathbf{a}] \pm (p\mathbf{p} - a\mathbf{a} \operatorname{sign} I_2) \} X_{1,2}^0,$$

$$\mathbf{X}_{3,4} = -X_-^{-1} \{ [\mathbf{p} \times \mathbf{a}] \pm i(a\mathbf{p} + p\mathbf{a} \operatorname{sign} I_2) \} X_{3,4}^0, \quad (\text{A.3.23})$$

$$X_\pm = \frac{1}{2} [\mathbf{p}^2 + \mathbf{a}^2 \pm (p^2 + a^2)].$$

$$(X_i X_i) = 0, \quad (X_{1,2} X_{3,4}) = 0, \quad (X_1 X_2) = 1, \quad (X_3 X_4) = -1. \quad (\text{A.3.24})$$

А.4 Инвариантное интегрирование по углам

Рассмотрим интеграл, в котором n^μ — элемент базиса нулевой плоскости с компонентами $n^\mu = \{1, \mathbf{n}\}$, $|\mathbf{n}| = 1$, следующего вида

$$J_0 = \int d\mathcal{O} \frac{1}{(nu)^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{(u^0 - |\mathbf{u}| \cos \vartheta)^2} = \frac{4\pi}{u^\mu u_\mu}. \quad (\text{A.4.1})$$

Таким образом, J_0 — инвариант, и на массовой поверхности $u^\mu u_\mu = 1$

$$J_0 = 4\pi. \quad (\text{A.4.2})$$

Дифференцируя выражение (А.4.1) по компонентам 4-скорости, имеем

$$\begin{aligned} \int d\mathcal{O} \frac{n^\sigma}{(nu)^3} &= 4\pi u^\sigma, \\ \int d\mathcal{O} \frac{n^\sigma n^\mu}{(nu)^4} &= 4\pi \left\{ \frac{4}{3} u^\sigma u^\mu - \frac{1}{3} g^{\sigma\mu} \right\}, \\ \int d\mathcal{O} \frac{n^\sigma n^\mu n^\nu}{(nu)^5} &= 4\pi \left\{ 2u^\sigma u^\mu u^\nu - \frac{1}{3} [g^{\sigma\mu} u^\nu + g^{\sigma\nu} u^\mu + g^{\mu\nu} u^\sigma] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.4.3})$$

и т. д.

Так как $n^0 = 1$, то, полагая $\sigma = 0$, имеем

$$\begin{aligned} J_1 &= \int d\mathcal{O} \frac{1}{(nu)^3} = 4\pi u^0, \\ J_2 &= \int d\mathcal{O} \frac{n^\mu}{(nu)^4} = 4\pi \left\{ \frac{4}{3} u^0 u^\mu - \frac{1}{3} g^{0\mu} \right\}, \\ J_3 &= \int d\mathcal{O} \frac{n^\mu n^\nu}{(nu)^5} = 4\pi \left\{ 2u^0 u^\mu u^\nu - \frac{1}{3} [g^{0\mu} u^\nu + g^{0\nu} u^\mu + g^{\mu\nu} u^0] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.4.4})$$

и т. д.

А.5 Соответствие формул*Соответствие формул в хевисайдовой системе единиц и СГС*

Физическая величина	Хевисайдова система единиц $\hbar = c = 1$	СГС
Длина	l	l
Время	t	ct
Масса	m	$\frac{c}{\hbar} m$
Импульс	p	$\frac{1}{\hbar} p$
Энергия	\mathcal{E}	$\frac{1}{\hbar c} \mathcal{E}$

Соответствие формул в хевисайдовой системе единиц и СГС

Физическая величина	Хевисайдова система единиц $\hbar = c = 1$	СГС
Сила	\mathbf{F}	$\frac{1}{\hbar c} \mathbf{F}$
Напряженности и индукции полей	$\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$	$\frac{1}{(4\pi)^{1/2}} \frac{1}{(\hbar c)^{1/2}} \mathbf{E}, \dots$
Потенциал	φ, \mathbf{A}	$\frac{1}{(4\pi)^{1/2}} \frac{1}{(\hbar c)^{1/2}} \varphi, \dots$
Заряд	e	$\left(\frac{4\pi}{\hbar c}\right)^{1/2} e$
Сила тока	J	$\frac{1}{c} \left(\frac{4\pi}{\hbar c}\right)^{1/2} J$

Соответствие формул в хевисайдовой системе единиц и СГС

Физическая величина	Хевисайдова система единиц $\hbar = c = 1$	СГС
Электрическая емкость	C	$4\pi C$
Индуктивность	L	$\frac{c^2}{4\pi}L$
Сопротивление	R	$\frac{c}{4\pi}R$
Частота	ω	$\frac{1}{c}\omega$

При использовании данных правил соответствия, необходимо применять их не только в правых частях формул, но также и в *левых*.

Учебное издание

Лобанов А. Е. «Основы теоретической физики».
Релятивистская механика.
Электродинамика. — Баку, 2017. 196 с.

Директор типографии:

С.М.Сейидов

Технический редактор:

А.Г.Алиев



Подписано в печать 02.11.2017. Формат 64x92.
Бумага офсетная 80 гр, Печать - цифровая,
Объем 12,25 усл. печ. л. Тираж 100

Отпечатано в типографии
Филиала МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Баку



Лобанов А. Е.

Основы теоретической физики