



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Корнев В.К., Колотинский Н.В.

Джозефсоновские структуры



Издательство Э́дитгус
Москва
2026

УДК 621.396.6-973+538.945(075.8)
ББК 32.855
К67

*Рекомендовано к изданию Ученым советом Физического факультета
Московского Государственного Университета имени М.В. Ломоносова*

Рецензенты:

д.ф.-м.н., проф. П.А. Поляков (МГУ имени М.В. Ломоносова)
к.ф.-м.н., доцент В.В. Шорохов (МГУ имени М.В. Ломоносова)

Корнев В.К., Колотинский Н.В.

К67 Джозефсоновские структуры — М.:Эдитус, 2026 — 108 с.:ил.

ISBN 978-5-00217-830-8

Учебное пособие предназначено для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям «Физическая электроника» и «Физика твердого тела», и ориентировано на расширение и дополнение специальных курсов кафедры атомной физики, физики плазмы и микроэлектроники и кафедры физики полупроводников и криоэлектроники физического факультета МГУ.

В пособии рассматриваются джозефсоновские переходы с различными типами слабой связи между сверхпроводниками, сверхпроводящие квантовые интерференционные устройства, сложные джозефсоновские структуры, в том числе, на основе высокотемпературных сверхпроводников. Дается обзор физических моделей различных типов джозефсоновских переходов и их взаимодействия с высокочастотными сигналами, рассматриваются распределенные джозефсоновские структуры и вихревые образования в них, вольт-амперные характеристики.

УДК 621.396.6-973+538.945(075.8)
ББК 32.855

ISBN 978-5-00217-830-8

© Корнев В.К., Колотинский Н.В., 2026

Оглавление

Введение	4
1 Микроскопическая теория сверхпроводимости	6
1.1 Электрон-фононное взаимодействие	6
1.2 Основное состояние сверхпроводника	9
1.3 Энергия основного состояния	15
1.4 Спектр элементарных возбуждений сверхпроводника	20
1.5 Температурная зависимость	23
1.6 Электронные и дырочные возбуждения	26
1.7 Полупроводниковая модель спектра возбуждений	29
1.8 Электрохимический потенциал	30
1.9 Туннельные эффекты в сверхпроводниках	32
1.10 Эффект квантования магнитного потока	42
2 Эффект Джозефсона	44
2.1 Основные типы джозефсоновских переходов	48
2.2 Энергия джозефсоновского перехода	56
2.3 Резистивная модель	61
2.4 ВАХ туннельных джозефсоновских переходов	69
2.5 Джозефсоновские переходы на основе высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП)	73
2.6 Джозефсоновские пи-переходы	77
2.7 Воздействие внешнего гармонического сигнала	81
2.8 Распределенный туннельный джозефсоновский переход	86
3 Сверхпроводящие квантовые интерферометры (сквиды)	97
3.1 Одноконтактный интерферометр	97
3.2 Двухконтактный интерферометр	100
Список литературы	106

Введение

Сверхпроводимость была открыта в 1911 г. в Голландии в Лейденской лаборатории Камрлинг-Оннесом, который в процессе изучения зависимости электросопротивления ртути от температуры обнаружил, что при температуре около 4 К сопротивление образца внезапно исчезло и не было обнаружено при всех достижимых температурах ниже этой [1]. Важно, что сопротивление исчезало не постепенно, а скачком. Это свидетельствовало о том, что образец перешел в какое-то новое состояние, в котором он не имеет сопротивления. Это явление было названо сверхпроводимостью. В настоящее время известно из точных экспериментальных исследований, что сопротивление сверхпроводников отсутствует по крайней мере на уровне

Материал	T_c , К	$B_{c/c2}(0)$, Тл	Род
Al	1,175	0,01	I
Pb	7,2	0,08	I
Nb	9,2	0,2	II
NbT	9,6	16	II
NbN	13...16	16	II
MgB ₂	40	15...20 (<i>ab</i>) 3 (<i>c</i>)	II
YBa ₂ Cu ₃ O ₇	92,4	240 (<i>ab</i>) 110 (<i>c</i>)	II
Bi ₂ Sr ₂ CaCu ₂ O ₈	94	> 60 (<i>ab</i>) > 250 (<i>c</i>)	II
Bi ₂ Sr ₂ Ca ₂ Cu ₃ O ₁₀	110	40 (<i>ab</i>) > 250 (<i>c</i>)	II

Таблица 1: Критические температуры T_c и критические магнитные поля $B_{c/c2}(0)$ при $T = 0$. (*ab*) и (*c*) – величины полей, направленных параллельно кристаллической плоскости *a-b* и перпендикулярно соответственно. По данным из [2; 3].

10^{-24} Ом · см. Для сравнения можно указать, что удельное сопротивление чистой меди при температуре 4,2 К имеет порядок 10^{-9} Ом · см.

Впоследствии было обнаружено, что свойством сверхпроводимости обладают и некоторые другие металлы, многие сплавы и интерметаллические соединения. До 1986 г. наиболее высокие температуры существования сверхпроводимости (около 20 К) наблюдались для интерметаллических соединений. Затем в 1986–1993 гг. был открыт ряд сверхпроводников, способных находиться в сверхпроводящем состоянии до температур, превышающих температуру кипения жидкого азота 77 К при нормальном атмосферном давлении (см.табл. 1). Такие сверхпроводники получили название *высокотемпературных сверхпроводников* (ВТСП).

Температура, при которой происходит переход образца из нормального состояния в сверхпроводящее называется критической температурой и обозначается как T_c . Очень скоро после открытия сверхпроводимости было обнаружено, что сверхпроводимость образца может быть разрушена не только нагреванием образца, но и помещением его в относительно слабое магнитное поле. Это поле, разрушающее сверхпроводимость массивного образца, называется критическим полем массивного образца и обычно обозначается как H_{cm} . Зависимость H_{cm} от температуры хорошо описывается эмпирической формулой

$$H_{cm}(T) = H_{cm}(0) \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right]. \quad (1)$$

1 Микроскопическая теория сверхпроводимости

Основной теорией, описывающей сверхпроводимость на микроскопическом уровне, является теория Бардина — Купера — Шриффера [4; 5], которая и будет рассмотрена в данном разделе.

1.1 Электрон-фононное взаимодействие

Первый намек на природу механизма сверхпроводимости был получен с открытием изотоп-эффекта. Явление заключается в том, что разные изотопы одного и того же сверхпроводящего металла имеют разные критические температуры T_c , причем выполняется зависимость:

$$T_c M^\alpha = \text{const}, \quad (2)$$

где M — масса изотопа. Степень α оказывается для большинства элементов близкой к 0,5.

Таким образом, стало понятно, что ионная решетка металла активно участвует в создании сверхпроводящего состояния. Теоретический анализ показал, что взаимодействие между электронами и колебаниями кристаллической решетки может вызвать дополнительное взаимодействие между электронами. При определенных условиях это взаимодействие будет давать притяжение между электронами, результатом которого при достаточно низкой температуре (низкой энергии тепловых флуктуаций) будет сверхпроводящее состояние.

Изменение колебаний кристаллической решетки описывается получением или передачей фононов (бозе-квазичастиц) — квантов согласованных колебаний кристаллической решетки, которые характеризуются волновым вектором \mathbf{q} и энергией $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$. При поглощении фонона в решетке возникает возбуждение в виде упругой волны с частотой $\omega_{\mathbf{q}}$. Энергия фононов (в модели Дебая) ограничена величиной $\hbar\omega_D$, где ω_D — циклическая частота

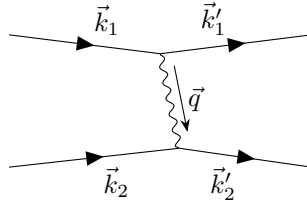


Рис. 1. Иллюстрация общего случая взаимодействия электронов через кристаллическую решетку (рассеяние электронов друг на друге) посредством испускания и поглощения фонана с импульсом \mathbf{q} .

Дебая — максимальная частота согласованных колебаний кристаллической решетки.

Рассмотрим вначале состояние металла при $T = 0$. Тепловые фононы отсутствуют. Возможны только фононы, осуществляющие взаимодействие электронов через решетку. Один электрон с волновым вектором \mathbf{k}_1 испускает фотон с волновым вектором \mathbf{q} и переходит в состояние $\mathbf{k}'_1 = \mathbf{k}_1 - \mathbf{q}$, а другой электрон с волновым вектором \mathbf{k}_2 поглощает этот фотон и переходит в состояние $\mathbf{k}'_2 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{q}$, как, например, схематично показано на рис. 1. Это значит, что произошло рассеяние электронов друг на друге, причем $\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2$. Тем самым описывается эффективное взаимодействие электронов [2].

Такое рассеяние электронов может соответствовать притяжению электронов друг к другу во многих материалах. В момент, когда электрон переходит из состояния \mathbf{k}_1 в состояние \mathbf{k}'_1 , возникает колебание электронной плотности с частотой $\omega = (\mathcal{E}_{k_1} - \mathcal{E}_{k'_1}) / \hbar$, где \mathcal{E}_{k_1} и $\mathcal{E}_{k'_1}$ — соответственно энергии электрона в состояниях \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}'_1 ($\mathcal{E}_k = \hbar^2 k^2 / 2m$). Предположим, что в результате такого колебания в данном месте произошло локальное увеличение плотности электронов. Ионы начнут притягиваться к этому месту и, обладая большой массой, даже после того, как скомпенсируют избыток электронов, будут продолжать свое первоначальное движение, и произойдет перекompенсация. Теперь в этом месте появится уже положительный заряд. Тогда второй электрон с импульсом \mathbf{k}_2 начнет притягиваться к этому месту с образовавшимся избыточным положительным зарядом, в результате чего

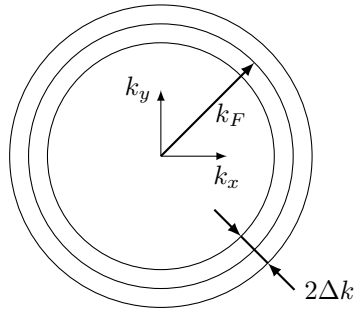


Рис. 2. Взаимодействуют через фононы по модели БКШ только те электроны, k -векторы которых находятся в слое $2\Delta k$ около поверхности Ферми.

возникает эффективное притяжение между электронами, образующими при этом так называемую куперовскую пару электронов. Такое притяжение может возникнуть только, если колебания решетки (рассматриваемые как вынужденные) происходят в фазе с вынуждающей силой (колебания электронной плотности). Например, если рассмотреть простой осциллятор с массой m и собственной частотой ω_0 , который испытывает действие вынуждающей силы $f e^{i\omega t}$, то уравнение движения такой системы

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = (f/m) e^{i\omega t}$$

будет иметь своим решением вынужденные колебания

$$x = x_0 e^{i\omega t},$$

где $x_0 = f / [m (\omega_0^2 - \omega^2)]$.

Эти колебания будут происходить в фазе с вынуждающей силой, когда $\omega^2 < \omega_0^2$.

Вернемся теперь к электронам. Для того, чтобы электрон мог перейти из состояния k_1 в состояние k'_1 , последнее должно быть свободно (принцип Паули). Такое возможно лишь вблизи поверхности Ферми, которую мы представим себе в виде сферы радиуса k_F в k -пространстве.

Основной закон взаимодействия электронов через фононы в теории БКШ формулируется следующим образом: электроны, энергия которых от-

личается от энергии электрона на поверхности Ферми не больше, чем на величину $\hbar\omega_D$ (см. рис. 2), притягиваются друг к другу. Энергия их взаимодействия равна V . Все остальные электроны не взаимодействуют. В силу этого положения, запишем матричный элемент взаимодействия электронов в виде:

$$V_{kk'} = \begin{cases} -V & |\mathcal{E}_k - \mathcal{E}_F| \leq \hbar\omega_D, & |\mathcal{E}_{k'} - \mathcal{E}_F| \leq \hbar\omega_D \\ 0 & |\mathcal{E}_k - \mathcal{E}_F| \geq \hbar\omega_D, & |\mathcal{E}_{k'} - \mathcal{E}_F| \geq \hbar\omega_D \end{cases}. \quad (3)$$

Таким образом, в модели БКШ притягиваются только те электроны, k -векторы которых находятся в узком сферическом слое, толщина которого $2\Delta k$ соответствует дебаевской энергии:

$$\frac{\Delta k}{k_F} \sim \frac{\hbar\omega_D}{\mathcal{E}_F}, \quad (4)$$

где

$$\mathcal{E}_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{(2m)}. \quad (5)$$

1.2 Основное состояние сверхпроводника

Оператор Гамильтона \hat{H} рассматриваемой системы состоит из суммы операторов кинетической энергии \hat{H}_k и энергии взаимодействия \hat{V} . В общем случае состояние системы описывается волновой функцией $\Psi(r_1, r_2, \dots, r_N) = \sum a_n \psi_n(r_1, r_2, \dots, r_N)$, где $\{\psi_n\}$ — полная система ортонормированных волновых функций, являющихся решением уравнения Шредингера, N — количество частиц. Среднее значение энергии системы (кинетической и потенциальной) определяется выражением $E = \int \Psi^* \hat{H} \Psi d\tau$, где интегрирование ведется по всем N переменным. Отсюда следует, что среднее значение энергии взаимодействия:

$$\bar{V} = \int \Psi^* \hat{V} \Psi d\tau = \int \sum_n a_n^* \psi_n^* \hat{V} \sum_m a_m \psi_m d\tau = \sum_n \sum_m a_n^* a_m V_{nm}, \quad (6)$$

где V_{nm} — матричный элемент перехода из состояния ψ_m в состояние ψ_n , при котором произошло рассеяние одной из пар электронов из состояния $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ в состояние $(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2)$:

$$V_{nm} = \int \psi_n^* \widehat{V} \psi_m d\tau. \quad (7)$$

В нормальном металле при $T = 0$ наименьшей энергии соответствует состояние, когда все электроны в импульсном пространстве (k -пространстве) занимают состояния, лежащие внутри поверхности Ферми, а все состояния вне этой поверхности свободны. Это соответствует минимальной кинетической энергии. Потенциальной энергии в этой модели нет.

Если теперь учесть потенциальную энергию взаимодействия электронов, то поскольку это взаимодействие представляет из себя притяжение, то учет потенциальной энергии будет понижать общую энергию системы. Но для этого необходимо обеспечить возможность рассеяния электронов из состояния $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$, которое должно быть изначально заполнено, в состояние $(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2)$, которое должно быть изначально свободно. Поэтому полностью заполненная сфера Ферми в k -пространстве перестает соответствовать минимальной энергии сверхпроводника при $T = 0$. В такой системе (в сверхпроводнике) оптимальным становится уже состояние с измененным распределением электронов по энергии вблизи уровня Ферми — состояния, которое, несмотря на некоторое увеличение кинетической энергии электронов, позволяет реализовать понижение полной энергии за счет потенциальной энергии. Теперь минимальной полной энергии будет соответствовать состояние с «размазанной» поверхностью Ферми, в котором некоторые k -ячейки над поверхностью Ферми заполнены, в то время как некоторые k -ячейки под поверхностью Ферми оказываются пустыми.

Если спариваются электроны, имеющие суммарный импульс $\hbar q$, то во взаимодействии участвуют лишь те электроны, которые заполняют показанную на рис. 3 заштрихованную часть импульсного пространства ($\hbar k$ -пространства), которая представляет собой пересечение $2\hbar\Delta k$ -слоев, сдвинутых на $\hbar q$. Действительно, изменение импульсов взаимодействующих электронов, которые одновременно являются смежными сторонами пока-

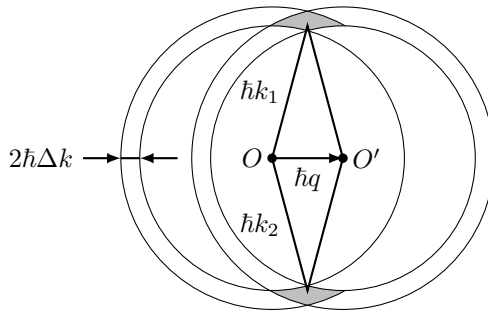


Рис. 3. Если спариваются электроны, имеющие суммарный импульс $\hbar q$, то во взаимодействии участвуют лишь те электроны, которые заполняют заштрихованную часть $\hbar k$ -пространства.

занного на рисунке ромба, при испускании или поглощении фонона должно отвечать условию, такому, что состояние электронов всегда должно быть внутри слоя толщиной $2\hbar\Delta k$. Совместное выполнение этого требования для каждого из электронов пары ограничивают область $\hbar k$ -пространства до заштрихованной части. Начнем уменьшать q , тогда заштрихованная область будет увеличиваться. При $q = 0$, когда взаимодействуют электроны с противоположно направленными импульсами, вклад в уменьшение полной энергии будут давать все электроны в $2\hbar\Delta k$ -слое. Поэтому основная часть возникающих куперовских пар электронов является результатом рассеяния пар электронов из состояния $(\mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \downarrow)$ в состояние $(\mathbf{k}' \uparrow, -\mathbf{k}' \downarrow)$, как показано на рис. 4. Стрелками обозначены направления проекций спинов электронов, которые должны быть антипараллельны в силу существования обменного взаимодействия, усиливающего отталкивание электронов с одинаково направленными проекциями спинов. Таким образом, электронные пары должны иметь нулевой полный спин и поэтому представляют собой конденсат бозе-частиц. Каждый из электронов в $2\Delta k$ -слое непрерывно испытывает акты рассеяния с электронами этого слоя и, таким образом, находится постоянно в составе куперовских пар с электронами этого слоя.

Для осуществления минимизации энергии сверхпроводника за счет рассеяния электронов с противоположно направленными импульсами заполнение ячеек в k -пространстве должно происходить попарно, то есть, если

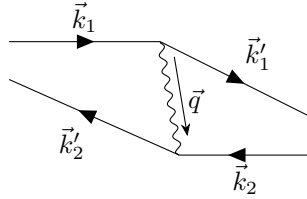


Рис. 4. Иллюстрация взаимодействия (притяжения) электронов (рассеяние друг на друге) с противоположно направленными импульсами через решетку посредством испускания и поглощения фонона с импульсом $\hbar q$, когда $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2 = 0$.

ячейка ($\mathbf{k} \uparrow$) заполнена, то и ячейка ($-\mathbf{k} \downarrow$) тоже должна быть заполнена. То же самое требование относится и к пустым ячейкам k -пространства под сферой Ферми. Такое состояние показано схематически на рис. 5.

Введем функцию v_k^2 волнового вектора, описывающую вероятность того, что пара состояний $(k, -k)$ занята. Тогда амплитуду состояния, в котором ячейки $(k, -k)$ заняты, а ячейки $(k', -k')$ свободны, можно записать в виде:

$$\alpha_n = \sqrt{v_k^2 (1 - v_{k'}^2)} = v_k u_{k'}, \quad (8)$$

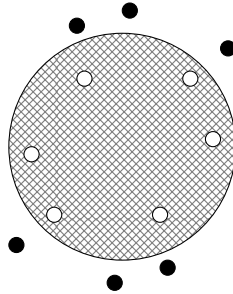


Рис. 5. Схематическое изображение состояния в k -пространстве (с парно занятыми и парно свободными ячейками k -пространства), полная энергия которого может оказаться меньше энергии состояния, в котором все ячейки k -пространства под сферой Ферми заняты, а над ней — свободны.

где

$$u_{k'}^2 = 1 - v_{k'}^2. \quad (9)$$

Аналогично, амплитуда состояния, в котором теперь ячейки $(k, -k)$ свободны, а ячейки $(k', -k')$ заняты, можно записать в виде:

$$\alpha_m = v_{k'} u_k. \quad (10)$$

Полная энергия сверхпроводника в состоянии, описываемом распределением v_k^2 , будет иметь вид:

$$W_s = \sum 2\varepsilon_k v_k^2 + \sum \sum V_{kk'} v_{k'} u_k v_k u_{k'}. \quad (11)$$

Первое слагаемое описывает полную кинетическую энергию системы, ε_k — кинетическая энергия электрона в ячейке k , отсчитанная от энергии Ферми, то есть

$$\varepsilon_k = \mathcal{E}_k - \mathcal{E}_F = \hbar^2 k^2 / 2m - \hbar^2 k_F^2 / 2m. \quad (12)$$

Второе слагаемое есть потенциальная энергия взаимодействия электронов, где матричный элемент описывается формулой (3).

Теперь нужно найти вид функции v_k^2 , которая будет минимизировать полную энергию. Из условия экстремума

$$\frac{\partial W_s}{\partial (v_k^2)} = 0 \quad (13)$$

с учетом того, что пара $(k, -k)$ в двойной сумме (11) встречается дважды (в суммировании по k и по k'), получаем:

$$2\varepsilon_k - V \frac{1 - 2v_k^2}{v_k u_k} \sum v_{k'} u_{k'} = 0. \quad (14)$$

В соответствии с выражением (3) суммирование выполняется в сферическом слое около поверхности Ферми, где матричный элемент $V_{kk} \neq 0$. Введем величину

$$\Delta_0 = V \sum v_{k'} u_{k'}, \quad (15)$$

и приходим к следующему выражению:

$$\frac{v_k u_k}{1 - 2v_k^2} = \frac{\Delta_0}{2\varepsilon_k}, \quad (16)$$

из которого следует квадратное уравнение:

$$v_k^4 - v_k^2 + \frac{\Delta_0^2}{(4E_k^2)}, \quad (17)$$

где

$$E_k = \sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_0^2}. \quad (18)$$

Тогда

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_k}{E_k} \right), \quad (19)$$

и, соответственно,

$$u_k^2 = 1 - v_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon_k}{E_k} \right). \quad (20)$$

В решении квадратного уравнения выбран знак «минус», так как из физических соображений величина v_k^2 должна стремиться к 1 при $k \rightarrow 0$ и к 0 при $k \rightarrow \infty$, а величина E_k в обоих случаях должна стремиться к $|\varepsilon_k|$ (где

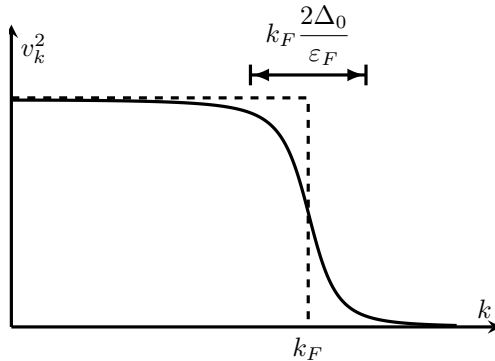


Рис. 6. Зависимость v_k^2 от k [2]. На уровне Ферми $v_k^2 = 1/2$. Значениям кинетической энергии $\varepsilon_k = \pm\Delta_0$, отсчитанным от уровня Ферми, соответствует $v_k^2 \simeq 0,5 \mp 0,35$

ε_k — кинетическая энергия электрона, отсчитанная от энергии Ферми $\mathcal{E}_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m$).

На рис. 6 показан график зависимости v_k^2 от k . Из этого графика следует, что полная энергия системы достигает минимума тогда, когда распределение электронов по кинетической энергии около поверхности Ферми «размазано» на некотором интервале энергии. Еще раз следует подчеркнуть, что это происходит при абсолютном нуле температуры. Таково основное состояние сверхпроводника.

1.3 Энергия основного состояния

Вычисление энергии основного состояния сверхпроводника (при $T = 0$) необходимо начать с вычисления величины Δ_0 :

$$\Delta_0 = V \sum_{k'}'' \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_{k'}}{E_{k'}} \right) \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon_{k'}}{E_{k'}} \right) \right]^{1/2} = \frac{V}{2} \sum_{k'}'' \left(\frac{E_{k'}^2 - \varepsilon_{k'}^2}{E_{k'}^2} \right)^{1/2} = \frac{V \Delta_0}{2} \sum_{k'}'' (\varepsilon_{k'}^2 + \Delta_0^2)^{-1/2}. \quad (21)$$

Здесь штрихи у знака суммы подчеркивают тот факт, что суммирование следует выполнять только внутри сферического слоя, в котором $V \neq 0$. Далее суммирование по k -состояниям внутри сферического слоя вокруг уровня Ферми можно заменить интегрированием, введя функцию плотности состояний $N(\varepsilon)$, где энергия ε отсчитывается от уровня Ферми (обычно подразумевается рассмотрение единичного объема вещества):

$$1 = \frac{V}{2} \sum_{k'}'' (\varepsilon_{k'}^2 + \Delta_0^2)^{-1/2} \Rightarrow \sum_{k'}'' \dots = \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \dots N(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Внутри этого слоя плотность состояний можно считать постоянной $N(\varepsilon) \simeq N(0)$:

$$1 = \frac{N(0)V}{2} \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} (\varepsilon^2 + \Delta_0^2)^{-1/2} d\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{N(0)V} = \operatorname{arsh} \left(\frac{\hbar\omega_D}{\Delta_0} \right) \\ \Rightarrow \frac{\hbar\omega_D}{\Delta_0} = \operatorname{sh} \left(\frac{1}{N(0)V} \right). \quad (22)$$

Поскольку $N(0)V$ для большинства сверхпроводников имеет величину порядка $N(0)V \approx 0,3$ и менее, можно получить следующее приближенное равенство:

$$\Delta_0 \approx 2\hbar\omega_D \exp \left(\frac{-1}{N(0)V} \right). \quad (23)$$

Оценим величину Δ_0 , выражая энергию в кельвинах (как Δ_0/k_B , где k_B – постоянная Больцмана), дебаевская температура $\hbar\omega_D \sim 100$ К ($\sim 8,6$ мэВ), $N(0)V \sim 0,3$ (при этом $\exp(-1/0,3) \approx 0,036$), тогда $\Delta_0 \sim 4$ К ($\sim 0,34$ мэВ).

В случае нормального проводника энергия основного состояния ($T = 0$):

$$E_N = \sum_{k < k_F} 2\varepsilon_k, \quad (24)$$

где суммирование выполняется по парам состояний $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$, поэтому появляется множитель 2. Энергию основного состояния сверхпроводника будем отсчитывать от энергии основного состояния нормального металла:

$$W = E_s - E_N. \quad (25)$$

$$W = \sum_{k < k_F} 2\varepsilon_k (v_k^2 - 1) + \sum_{k > k_F} 2\varepsilon_k v_k^2 - V \sum_{k, k'}'' v_k u_k v_{k'} u_{k'}. \quad (26)$$

Подставляем далее выражение для v_k^2 и прodelьваем преобразования:

$$W = \sum_{k < k_F} |\varepsilon_k| (1 - |\varepsilon_k|/E_k) + \sum_{k > k_F} \varepsilon_k (1 - \varepsilon_k/E_K) - V \sum_k \sum_{k'}'' v_k u_k v_{k'} u_{k'}. \quad (27)$$

С учетом определения Δ_0 последняя двойная сумма может быть записана в виде

$$\sum_k \sum_{k'}'' v_k u_k v_{k'} u_{k'} = \frac{\Delta_0^2}{V^2}. \quad (28)$$

Отсюда получаем:

$$W = 2 \sum_{k > k_F} \varepsilon_k \left(1 - \frac{\varepsilon_k}{E_k} \right) - \frac{\Delta_0^2}{V}. \quad (29)$$

Переходим к интегрированию:

$$W = 2N_0 \int_0^{\hbar\omega_D} \varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0^2}} \right) d\varepsilon - \frac{\Delta_0^2}{V}. \quad (30)$$

После интегрирования получаем:

$$W = N(0)\Delta_0^2 \left\{ \left(\frac{\hbar\omega_D}{\Delta_0} \right)^2 - \frac{\hbar\omega_D}{\Delta_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar\omega_D}{\Delta_0} \right)^2} + \operatorname{arch} \left(\frac{\hbar\omega_D}{\Delta_0} \right) \right\} - \frac{\Delta_0^2}{V}. \quad (31)$$

Используя соотношение $\hbar\omega_D \gg \Delta_0$ и полученное выше выражение (22) для $1/(N(0)V)$, приходим окончательно к следующему выражению для энергии основного состояния сверхпроводника при $T = 0$ (отсчитанное от его энергии в нормальном состоянии):

$$W = \left[\frac{\Delta_0^2}{V} - \frac{1}{2}N(0)\Delta_0^2 \right] - \frac{\Delta_0^2}{V} = -\frac{1}{2}N(0)\Delta_0^2. \quad (32)$$

Абсолютная величина этой энергии существенно меньше, чем взятое в отдельности *увеличение кинетической энергии* (за счет присутствия состояний с $k > k_F$), выделенное квадратными скобками, и чем взятое в отдельности *уменьшение за счет потенциальной энергии* Δ_0^2/V совокупности взаимодействующих электронов.

Отрицательный знак в полученном выражения для W означает, что в сверхпроводящем состоянии энергия меньше, следовательно, такое состояние является энергетически более выгодным. В то же время, величина раз-

ности энергий в нормальном и сверхпроводящем состоянии может быть выражена, как известно, через энергию магнитного поля [2]:

$$W = -\frac{B_{cm}^2(0)}{2\mu_0}, \quad (33)$$

где $B_{cm}(0)$ — критическое термодинамическое поле массивного сверхпроводника (совпадающее с реальным критическим магнитным полем сверхпроводника первого рода). Отсюда получаем следующую оценку величины критического термодинамического магнитного поля:

$$B_{cm}(0) = \Delta_0 \sqrt{N(0)\mu_0}. \quad (34)$$

Все взаимодействующие электроны, находящиеся у поверхности Ферми в сферическом энергетическом слое толщиной $2\hbar\omega_D$, существуют в состоянии так называемых куперовских пар электронов, которые динамически перерасеиваются через все парные ячейки ($\mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \downarrow$) в этом слое, приобретая за счет этого потенциальную энергию.

Движение куперовских пар электронов, как и носителей тока в любых «нормальных» (т.е. несверхпроводящих) веществах, подчиняется квантовым законам. Так, в случае слабо взаимодействующих частиц в пренебрежении спиновыми эффектами, это движение можно описать уравнением Шредингера:

$$i\hbar \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi, \quad (35)$$

где \hat{H} — оператор Гамильтона, Ψ — комплексная волновая функция данной частицы:

$$\Psi = |\Psi(r,t)| \exp[i\theta(r,t)]. \quad (36)$$

В стационарном состоянии, когда гамильтониан \hat{H} не зависит от времени, возможно разделение переменных:

$$\Psi(r,t) = \psi(r)f(t), \quad (37)$$

и задача сводится к системе двух уравнений, одно из которых — стационарное уравнение Шредингера для $\psi(r)$:

$$\hat{H}\psi(r) = E\psi(r), \quad (38)$$

где E — стационарное значение энергии частицы, а второе — уравнение для $f(t)$:

$$i\hbar \cdot \frac{\partial f(t)}{\partial t} = Ef(t), \quad (39)$$

имеющее своим решением функцию $f(t) = e^{-i(E/\hbar)t}$. Следовательно,

$$\Psi(r,t) = \psi(r)e^{-i(E\hbar)t}. \quad (40)$$

Таким образом, изменение фазы θ волновой функции частицы $\Psi(r,t)$ подчиняется уравнению:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{E}{\hbar}. \quad (41)$$

В нормальных проводниках уравнение (41) не приводит к квантовым соотношениям для макроскопических переменных. Действительно, в таких веществах носители тока имеют спин $1/2$, подчиняются статистике Ферми — Дирака, и поэтому, согласно принципу Паули, их энергии никогда не равны друг другу точно. В результате скорости $\partial\theta/\partial t$ изменения всех фаз волновых функций частиц различаются, фазы оказываются равномерно распределенными по тригонометрической окружности, и при их суммировании по всем частицам явная зависимость от θ исчезает.

Куперовская пара в сверхпроводнике представляет собой связанное состояние двух электронов с противоположными спинами и импульсами, следовательно, имеет нулевой суммарный спин. Такие пары уже подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна и «конденсируются» на одном, нижнем, энергетическом уровне. Поэтому скорости движения фаз куперовских пар $\partial\theta/\partial t$ точно совпадают.

Вторая характерная особенность куперовских пар — их относительно большой размер (до значений $\xi \sim 10^{-3}$ мм), намного превышающий сред-

нее расстояние между парами (последнее — порядка межатомных размеров), свидетельствует о сильном перекрытии пар (внутри объема ξ^3 лежат центры масс примерно 10^7 других пар). Иными словами, волновые функции куперовских пар сильно перекрыты; в результате пары «синхронизируются», то есть не только скорости изменения фаз, но и сами их фазы в каждой точке становятся равными друг другу.

Итак, совокупность («конденсат») куперовских пар является когерентной, то есть описывается единой волновой функцией $\Psi = |\Psi| e^{i\theta}$, которую часто называют также *параметром порядка*. Квадрат модуля этой волновой функции $|\Psi|^2$ описывает плотность частиц. Теперь уже макроскопические величины, в частности ток, могут явно зависеть от фазы θ единой волновой функции конденсата, так как эта зависимость остается при суммировании по частицам. Такая макроскопическая когерентность сверхпроводящего конденсата приводит не только к бесконечной проводимости, но и к ряду специфических когерентных эффектов, наиболее важными из которых являются эффект квантования магнитного потока и эффект Джозефсона.

1.4 Спектр элементарных возбуждений сверхпроводника

Вклад в энергию сверхпроводника, находящегося в основном состоянии, от одной произвольной пары (ячейки) состояний $(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$ в импульсном пространстве сверхпроводника состоит из алгебраической суммы кинетической энергии (отсчитываемой от уровня Ферми) двух электронов с учетом вероятности заполнения электронами этой пары состояний, т.е. с учетом «частоты использования» этой парной ячейки, и вклада этой ячейки в потенциальную энергию конденсата:

$$w_q = 2\varepsilon_q v_q - 2V v_q u_q \sum_k'' v_k u_k. \quad (42)$$

В потенциальной энергии множитель “2” учитывает тот факт, что эта пара встречается дважды в двойной сумме в выражении (26) для энергии

сверхпроводника (в суммировании по k и по k'). С учетом полученных выше соотношений (19) и (20) для v_k^2 и u_k^2 , дающих совместно выражение

$$v_q^2 u_k^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\varepsilon_q^2}{E_q^2} \right), \quad (43)$$

выполняем преобразование выражения (42):

$$w_q = 2\varepsilon_q \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_q}{E_q} \right) - 2\Delta_0 \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{\varepsilon_q^2}{E_q^2} \right)} = \varepsilon_q - \frac{\varepsilon_q^2}{E_q} - \frac{\Delta_0^2}{E_q} = \varepsilon_q - E_q. \quad (44)$$

Если ввести в сверхпроводник один дополнительный электрон с k -вектором \mathbf{q} , поместив его в свободную парную ячейку $(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$, или забрать электрон с k -вектором \mathbf{q} из заполненной парной ячейки $(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$, то пара состояний $(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$ не сможет далее участвовать в процессах рассеяния и не сможет давать вычисленный вклад w_q в энергию сверхпроводника W (отсчитанную от энергии в нормальном состоянии). Поэтому энергия сверхпроводника W_q с одним непарным электроном в состоянии \mathbf{q} (называемым элементарным возбуждением или квазичастицей), появившемся вместо или заполненного, или свободного парного состояния $(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$ будет

$$W_q = W + \varepsilon_q - w_q = W + E_q. \quad (45)$$

Поскольку $E_q = \sqrt{\varepsilon_q^2 + \Delta_0^2}$, очевидно, что добавление электрона к сверхпроводнику или удаление электрона из сверхпроводника, находящегося в основном состоянии, повышает энергию системы как минимум на величину Δ_0 (при $k_q = k_F$), как показано на рис. 7. Необходимо подчеркнуть, что энергия E_q , которую связывают с появлением квазичастицы, не является непосредственно энергией самой квазичастицы; она имеет только кинетическую энергию ε_q , так как не участвует в процессах рассеяния. Однако при этом изменяется энергия бозе-конденсата куперовских пар на величину w_q , т.е. можно говорить о некотором сдвиге основного, нижнего, энергетического уровня, на котором «сконденсированы» куперовские пары как бозе-частицы.

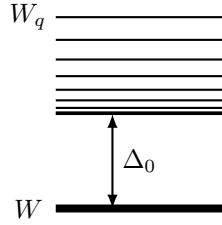


Рис. 7. Энергия сверхпроводника с одним элементарным возбуждением W_q превышает его энергию W в основном состоянии как минимум на величину Δ_0 .

В основном состоянии сверхпроводника все куперовские пары (бозе-частицы) сконденсированы на одном уровне энергии. При этом каждая пара обладает как кинетической, так и потенциальной энергией (отрицательной для притяжения электронов в паре). При разрыве куперовской пары, т.е. опустошении занятой парной ячейки $(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$, оба электрона пары становятся квазичастицами, попадая в какие-то другие пустые парные ячейки (по крайней мере, один из этих электронов) с импульсами $\hbar\mathbf{k}_i$ и $\hbar\mathbf{k}_j$ и, соответственно, увеличивая энергию системы не менее, чем на $2\Delta_0$. Требуемое количество энергии будет равно $E = E_i + E_j \geq 2\Delta_0$.

Связь между энергией элементарных возбуждений и значениями вектора \mathbf{k} , показанная на рис. 8, следует из выражения для энергии элементарного возбуждения:

$$E_q = \sqrt{\varepsilon_q^2 + \Delta_0^2} = \sqrt{(\hbar^2 k^2 / 2m - \hbar^2 k_F^2 / 2m)^2 + \Delta_0^2}. \quad (46)$$

Видно, что уровни элементарных возбуждений сгущаются при $E_q \rightarrow \Delta_0$. Плотность состояний $\rho(E)$ (число энергетических уровней $d\nu$, приходящихся на единичный интервал энергии dE в единичном объеме сверхпроводника) может быть выражена через плотность состояний $d\nu/d\varepsilon = N(0)$ около уровня Ферми для металла (в расчете на одну проекцию спина):

$$\rho(E) = \frac{d\nu}{dE} = \frac{d\nu}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dE} = N(0) \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta_0^2}}. \quad (47)$$

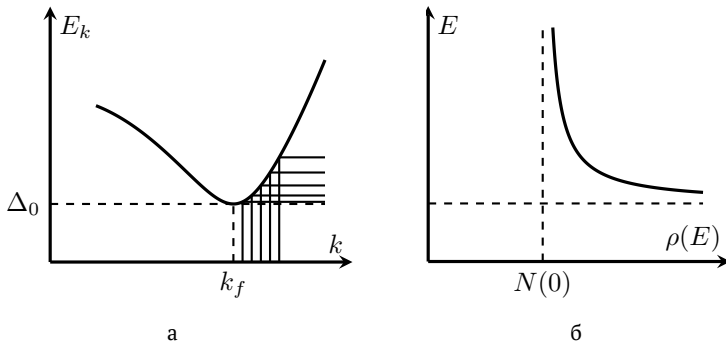


Рис. 8. Спектр элементарных возбуждений сверхпроводника E_k и плотность состояний $\rho(E)$.

1.5 Температурная зависимость

Энергетическая щель сверхпроводника Δ , равная Δ_0 при $T = 0$, уменьшается с повышением температуры. Для разрыва пары и создания двух элементарных возбуждений требуется затратить энергию 2Δ . Если температура сверхпроводника такова, что $k_B T \approx 2\Delta$, то ясно, что много электронных пар будет разорвано под влиянием теплового воздействия и, следовательно, в k -пространстве будет много ячеек, заполненных одиночными электронами, которые не будут участвовать во взаимных переходах пар и, соответственно, не будут участвовать в общем понижении энергии сверхпроводника и в формировании энергетической щели. Поскольку элементарные возбуждения подчиняются статистике Ферми — Дирака, вероятность заполнения состояния k одиночным электроном равна

$$f_k = \frac{1}{\exp(E_k/k_B T) + 1}, \quad (48)$$

где E_k — энергия, обусловленная элементарным возбуждением. Легко видеть, что $f_k(E_k) \ll 1$ при $k_B T \ll E_k$ и что $f_k(E_k) \approx 1/2$ при $k_B T \gg E_k$. Если хотя бы одно из состояний пары (k) или ($-k$) заполнено, то пара состояний ($k, -k$) не может участвовать в создании сверхпроводящего состояния. Вероятность этого равна $2f_k$, а вероятность того, что эта пара состояний *может*

участвовать равна $((1 - 2f_k))$. С учетом этого, выражение для полной энергии сверхпроводника при конечной температуре T может быть записано в следующем виде:

$$W = \sum_k 2|\varepsilon_k| f_k + 2 \sum_k \varepsilon_k (1 - 2f_k) v_k^2 - V \sum_{k,k'} v_k u_k v_{k'} u_{k'} (1 - 2f_k)(1 - 2f_{k'}). \quad (49)$$

Здесь первое слагаемое — кинетическая энергия элементарных возбуждений сверхпроводника, второе — кинетическая энергия сверхпроводящих электронов, третье — потенциальная энергия взаимодействия сверхпроводящих электронов через фононы. Плотность свободной энергии сверхпроводника:

$$F = W - TS, \quad (50)$$

где S — энтропия материала. Функцию v_k^2 определим из условия минимизации плотности свободной энергии (учитывая, что $TS = Q$ и $dF = dW$ при $\delta Q = 0$):

$$\frac{\partial F}{\partial (v_k^2)} = \frac{\partial W}{\partial (v_k^2)} = 0. \quad (51)$$

Это условие дает соотношение

$$\frac{v_q u_q}{1 - 2v_q^2} = \frac{\Delta}{2\varepsilon_q}, \quad \Delta \sum_k'' v_k u_k (1 - 2f_k). \quad (52)$$

Учитывая, что $v_q^2 = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon_q/E_q)$ и $E_q = \sqrt{\varepsilon_q^2 + \Delta^2(T)}$, приходим к уравнению:

$$\Delta = \sum_k'' \frac{\Delta}{2E_k} \left(1 - \frac{2}{\exp(E_k/k_B T) + 1} \right). \quad (53)$$

Переходя далее от суммирования к интегрированию, получаем формулу

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)}} \operatorname{th} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)}}{2k_B T}. \quad (54)$$

Эта формула дает в неявном виде зависимость энергетической щели от температуры. Эта зависимость показана на рис. 9. Вблизи T_c зависимость энер-

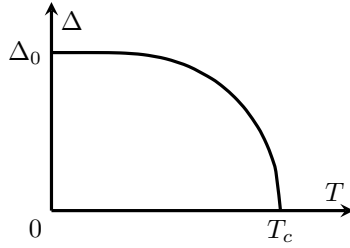


Рис. 9. Зависимость величины энергетической щели Δ от температуры T .

энергетической щели от температуры определяется выражением $\Delta \propto (T - T_c)^{1/2}$. Из (54) можно найти также явное выражение для T_c . Действительно, при критической температуре $T = T_c$ энергетическая щель $\Delta(T_c) = 0$, поэтому, если подставить в (54) T_c вместо T и положить $\Delta = 0$, то получим уравнение относительно критической температуры T_c :

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2k_B T_c}. \quad (55)$$

В результате интегрирования этого уравнения получаем [2]:

$$k_B T_c = 1,14 \hbar \omega_D \exp \left(-\frac{1}{N(0)V} \right). \quad (56)$$

Это выражение дает объяснение изотоп-эффекту $T_c M^{1/2} = \text{const}$ через зависимость дебаевской частоты от массы ионов решетки: $\omega_D \propto M^{-1/2}$.

Используя далее полученное выше выражение (23) для энергетической щели при нулевой температуре получаем связь между критической температурой и величиной энергетической щели при нулевой температуре:

$$2\Delta_0 = 3,52 k_B T_c. \quad (57)$$

1.6 Электронные и дырочные возбуждения

По аналогии с электронами в зоне проводимости и дырками в валентной зоне полупроводников можно ввести понятие электронных и дырочных возбуждений в металлах и сверхпроводниках.

В основном состоянии *металла* (без элементарных возбуждений при $T = 0$) все ячейки k -пространства внутри сферы Ферми (с радиусом k_f) заняты электронами, а ячейки вне этой сферы — свободны. Если ввести в металл один лишний электрон в какую-то ячейку k снаружи сферы Ферми ($k > k_F$), то *энергия всей системы* увеличится на $\hbar^2(k^2 - k_F^2)/2m$. При этом мы отсчитываем энергию от энергии Ферми $\hbar^2 k_F^2/2m$. В этом случае величина энергии $\varepsilon_k = \hbar^2(k^2 - k_F^2)/2m$ и импульс $\hbar k$ (импульс всей системы с добавленным электроном) называются соответственно энергией и импульсом электронного элементарного возбуждения (квазичастицы). Если удалить один электрон из ячейки k внутри сферы Ферми ($k < k_F$), т. е. поднять этот электрон до уровня Ферми, от которого отсчитывается энергия, то энергия этого состояния будет больше энергии основного состояния на $\varepsilon_k = \hbar^2(k_F^2 - k^2)/2m$. Это элементарное возбуждение (квазичастица) с энергией ε_k и импульсом $-\hbar k$ (импульс всей системы с удаленным электроном) ведет себя подобно положительному заряду и называется дыркой. Энергетический спектр элементарных возбуждений *нормального металла* показан схематически на рис. 10 пунктирными линиями (вблизи уровня Ферми, когда $|k - k_F| \ll k_F$ и, следовательно, энергия $\varepsilon_k \approx \hbar^2 k_F |k - k_F|/m$).

Рассмотрим теперь *сверхпроводник* в основном состоянии. Возникновение элементарного возбуждения в сверхпроводнике означает, что определенная пара состояний ($\mathbf{k}, -\mathbf{k}$) *не может* быть далее использована для перераспределения динамических куперовских пар. Это может быть реализовано путем добавления электрона в пустую ячейку ($\mathbf{k}, -\mathbf{k}$) или путем удаления электрона из занятой (двумя электронами) ячейки ($\mathbf{k}, -\mathbf{k}$). В первом случае получаем электронное возбуждение (квазичастицу), а во втором случае — дырку. Вероятность возможности занятия электроном пустой ячейки ($\mathbf{k}, -\mathbf{k}$) составляет $u_k^2 = 1 - v_k^2$, а вероятность возможности удаления электрона из ячейки ($\mathbf{k}, -\mathbf{k}$) составляет v_k^2 . Поэтому электронное возбуждение

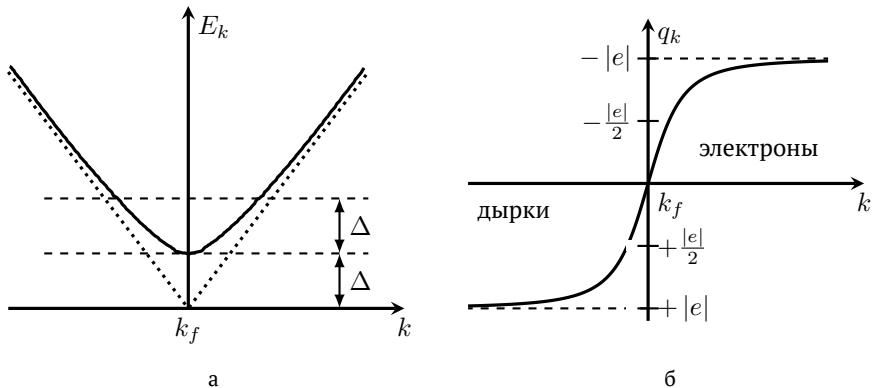


Рис. 10. Энергетический спектр E_k квазичастиц в сверхпроводнике (а) и их заряд q_k (б) в единицах отрицательного заряда электрона ($-e$) в зависимости от k . Пунктирными линиями показан спектр электронных ($k > k_F$) и дырочных ($k < k_F$) возбуждений в нормальном металле [2].

является более возможным при $|k| > k_F$, а дырочное возбуждение — при $|k| < k_F$. Таким образом, элементарное возбуждение в сверхпроводнике обладает одновременно свойствами как электрона, так и дырки, в зависимости от соотношения между v_k^2 и u_k^2 , а величина и знак разности $v_k^2 - u_k^2$, изменяющийся при переходе через k_F , определяют величину (в единицах заряда электрона e) и знак возбуждения в сверхпроводнике: $q_k = (v_k^2 - u_k^2) e$.

Электронная и дырочная ветви спектра квазичастиц в сверхпроводнике показаны схематически на рис. 10а сплошной линией. При $|k| > k_F$, когда ячейки скорее пусты, чем заполнены, возбуждение является электронно-подобным. При $|k| < k_F$, когда для создания возбуждения надо убирать электронный заряд, возбуждение является дырочно-подобным (рис. 10б). Следует добавить, что скорость распространения квазичастиц в реальном пространстве — это групповая скорость $dE_k/d\mathbf{p}_k = \hbar^{-1} dE_k/dk$. Поэтому согласно зависимости $E_k(k)$, показанной на рис. 10а, дырки движутся налево, а электроны направо.

Между возбуждениями в сверхпроводнике и конденсатом куперовских пар существует теснейшая связь. Поэтому величина и знак заряда квазичастичного возбуждения q_k , образовавшегося в результате помещения элек-

трона в ячейку k , может существенно отличаться от заряда электрона, так как часть заряда в этом случае передается конденсату куперовских пар.

Для получения общего результата, рассмотрим сверхпроводник, находящийся при некоторой конечной температуре, когда имеются как спаренные («сверхпроводящие») электроны, так и элементарные возбуждения. Пусть последние распределены по ячейкам k -пространства согласно функции распределения f_k , т.е. f_k — это вероятность того, что возбужденный электрон заполнит ячейку k . Поскольку вероятность того, что до этого она была свободна от сверхпроводящего электрона, есть v_k^2 , то полная вероятность обнаружить в ячейке k возбужденный электрон равна $f_k u_k^2$. С другой стороны, эта ячейка может быть заполнена электроном, принадлежащим к сверхпроводящим электронам. Для этого должны быть одновременно выполнены два условия: первое — в этой ячейке нет электрона, создающего возбуждение (вероятность этого равна $1 - f_k$), и второе — здесь есть сверхпроводящий электрон (вероятность равна v_k^2). Итак, полная вероятность обнаружить в ячейке электрон, принадлежащий сверхпроводящему коллективу, равна $(1 - f_k)v_k^2$. Поэтому полный заряд, находящийся в ячейке k , равен $(-e) \left[f_k u_k^2 + (1 - f_k)v_k^2 \right]$. Отсюда полный заряд всех электронов сверхпроводника равен

$$Q_{\text{total}} = (-e) \left\{ \sum f_k u_k^2 + \sum (1 - f_k) v_k^2 \right\}, \quad (58)$$

где e — абсолютная величина заряда электрона. Пусть в результате какого-то внешнего воздействия изменилось как распределение квазичастиц (на величину δf_k), так и распределение сверхпроводящих электронов (на величину δv_k^2). В результате произошло изменение полного заряда электронов сверхпроводника на величину δQ_{total} (например, на величину заряда электрона, который был дополнительно помещен в какую-то ячейку k):

$$\delta Q_{\text{total}} = (-e) \left\{ \sum (u_k^2 - v_k^2) \delta f_k + \sum (1 - 2f_k) \delta v_k^2 \right\}. \quad (59)$$

Первое слагаемое здесь — это, очевидно, изменение полного заряда квазичастиц, а второе — изменение заряда конденсата куперовских пар. Из этого

выражения следует, что заряд квазичастичного возбуждения

$$q_k = (-e) (u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2) = (v_{\mathbf{k}}^2 - u_{\mathbf{k}}^2) e. \quad (60)$$

Используя далее формулы (19) и (20) для функции $v_{\mathbf{k}}^2$ и $u_{\mathbf{k}}^2$ парного распределения сверхпроводящих электронов, получаем:

$$q_k = (-e) \cdot \frac{\varepsilon_k}{(\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (61)$$

Эта формула дает показанный на рис. 10б график зависимости заряда q_k квазичастичного возбуждения от k .

1.7 Полупроводниковая модель спектра возбуждений

Разделение элементарных возбуждений в сверхпроводнике на электронные и дырочные возбуждения (квазичастицы) позволяет использовать для описания энергии квазичастичных возбуждений полупроводниковую модель спектра возбуждений, как это показано на рис. 11. В рамках этой модели зоны электронных и дырочных возбуждений расположены симметрично относительно уровня электрохимического потенциала (уровня Ферми сверхпроводника). Зона электронных возбуждений отделена от зоны дырочных возбуждений запрещенной зоной, ширина которой равна удвоенной величине энергетической щели ($2\Delta_0$ при $T = 0$). Плотность состояний квазичастиц в зонах электронных и дырочных возбуждений имеет особенность (47) на границах с запрещенной зоной. Этот энергетический спектр описывает энергетические уровни только квазичастиц в сверхпроводнике и не включает состояние электронов, образующих конденсат куперовских пар, существование которого здесь отражается в наличии энергетической щели.

В основном состоянии сверхпроводника (при $T = 0$) все энергетические уровни в зоне электронных возбуждений свободны, а в зоне дырочных возбуждений все энергетические уровни заняты электронами, дырки



Рис. 11. Энергетические зоны электронов в чистом полупроводнике (а) и полупроводниковая модель спектра электронных (n) и дырочных (p) возбуждений в сверхпроводнике (б).

отсутствуют. При $T \neq 0$ заселенности этих зон электронами описываются распределением Ферми — Дирака:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\exp(\varepsilon/k_B T) + 1}, \quad (62)$$

где энергия ε отсчитывается от уровня Ферми.

Использование полупроводниковой модели энергетического спектра возбуждений в сверхпроводнике существенно упрощает рассмотрение многих явлений в сверхпроводниках, в том числе, эффектов туннелирования квазичастиц в туннельных структурах, таких как «нормальный металл — изолятор — сверхпроводник» (NIS) и «сверхпроводник — изолятор — сверхпроводник» (SIS).

1.8 Электрохимический потенциал

Электрохимический потенциал — это термодинамическая функция, которая применяется при описании состояния систем с переменным числом заряженных частиц. Равенство значений электрохимического потенциала во всех частях системы заряженных частиц отвечает условию равновесного состояния системы. Электрохимический потенциал включает в себя хими-

ческий и электрический потенциалы. В случае незаряженных частиц электрохимический потенциал совпадает с химический потенциалом, который представляет энергию добавления одной частицы в систему без совершения работы. Так, химический потенциал газа равен энергии Гиббса, приходящейся на одну частицу: $\mu = G/N$, где N — количество частиц в системе.

Химический потенциал является однозначной функцией концентрации соответствующих частиц. Наличие разности химических потенциалов означает наличие разности концентраций, которая вызывает процесс диффузии частиц (или туннелирования частиц) из одной части системы в другую. Таким образом, химический потенциал отвечает за процесс *перемещения свободных частиц* (заряженных или незаряженных), направленный на выравнивание их концентрации, подобно тому, как электрический потенциал обуславливает соответствующее направленное перемещение (направленный дрейф) свободных частиц, если они являются носителями заряда.

Потенциал Ферми (энергия Ферми, отнесенная к единице заряда: $\varphi_F = E_F/q$) представляет собой алгебраическую сумму химического и электрического потенциалов, то есть является **электрохимическим потенциалом**. Постоянство («горизонтальность») уровня Ферми как в отдельном проводнике, так и в системе электрически контактирующих проводников и сверхпроводников является условием равновесного состояния системы свободных заряженных частиц (электроны, дырки, ионы).

При рассмотрении электрического контакта двух проводников (включая туннельный контакт) возникает вопрос о выборе начала отсчета энергии электронов для разнородных материалов. Естественным выбором начала отсчета является ноль энергии электрона в вакууме. Энергия Ферми отдельного проводника находится ниже уровня отсчета энергии (электрона в вакууме) на величину работы выхода. Если контактируют разнородные проводники, то благодаря возможности прохождения электронов (дырок) из одного проводника в другой, происходит незначительное перераспределение зарядов до выравнивания уровней электрохимического потенциала за счет возникновения контактной разности потенциалов φ_E .

1.9 Туннельные эффекты в сверхпроводниках

Способность микрочастиц, в том числе, электронов, туннелировать через потенциальный барьер конечной ширины и высоты является сугубо квантово-механическим эффектом. Коэффициент прохождения потока микрочастиц с кинетической энергией E и массой m , падающих на потенциальный барьер высотой $U_0 > E$ и шириной a , определяется следующей формулой:

$$D = 16 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0} \right) \exp \left(-\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} \right). \quad (63)$$

Зависимость туннельного тока от напряжения, приложенного к электродам туннельной структуры, сильно изменяется при замене электродов из нормального проводника электродами из сверхпроводника. Обычно, в практической микроэлектронике, электродами являются пересекающиеся полоски нормальных или сверхпроводниковых пленок, разделенные тонким окисным слоем, выполняющим роль туннельного барьера, например, как показано на рис. 12.

Будем рассматривать относительно слабые туннельные токи, при которых сохраняется равновесное распределение носителей зарядов по энергиям в электродах туннельной структуры, а электрохимические потенциалы в электродах будут выравненными в отсутствие приложенного напряжения.

Начнем с простейшего случая, когда оба электрода сделаны из нормального металла, то есть рассмотрим структуру «нормальный металл — диэлектрик — нормальный металл» (NIN). При нулевой температуре в каждом электроде заняты электронами все энергетические уровни ниже уровня Ферми, а энергетические уровни выше уровня Ферми — свободны. После выравнивания уровней Ферми (см. рис. 13а) ток через туннельный промежуток прекращается: напротив занятых электронами энергетических уровней в одном электроде находятся только занятые уровни энергии в другом электроде. Поэтому принцип Паули препятствует туннелированию электронов (переходу *с сохранением энергии* из одного электрода в другой). Если подать на туннельный переход разность потенциалов V , то уровни Ферми метал-

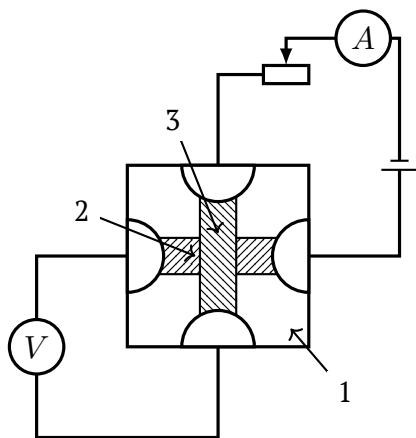


Рис. 12. Схема одного из экспериментов для изучения туннельного эффекта: 1 — диэлектрическая подложка, 2 — пленка первого металла (сверхпроводника), 3 — пленка второго металла (сверхпроводника). Пленки разделены тонким окисным слоем, который выполняет роль туннельного барьера между ними.

лов разойдутся на величину eV , и возникнет туннельный электрический ток (см. рис. 136). Если теперь предположить, что плотность состояний в интересующей нас области остается постоянной (плотность $N(0)$ вблизи уровня Ферми при относительно небольших напряжениях), то из рис. 13 ясно, что сила тока будет пропорциональна eV , т.е. будет выполняться закон Ома. При конечной температуре закон Ома тоже выполняется (при указанном выше условии, что слабый туннельный ток не нарушает распределение Ферми — Дирака (62)).

Общее выражение для плотности туннельного тока в этом случае:

$$j = \left(\frac{4\pi e}{\hbar} \right) N_1(0)N_2(0) \langle |H_T|^2 \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} \{f(\varepsilon) - f(\varepsilon + eV)\} d\varepsilon, \quad (64)$$

где $f(\varepsilon)$ — распределение Ферми — Дирака (ε — энергия, отсчитанная от энергии Ферми), k_B — постоянная Больцмана, $\langle |H_T|^2 \rangle$ — среднее значение квадрата матричных элементов туннельного гамильтониана (зависит от характеристик туннельного барьера и характеризует туннельную про-

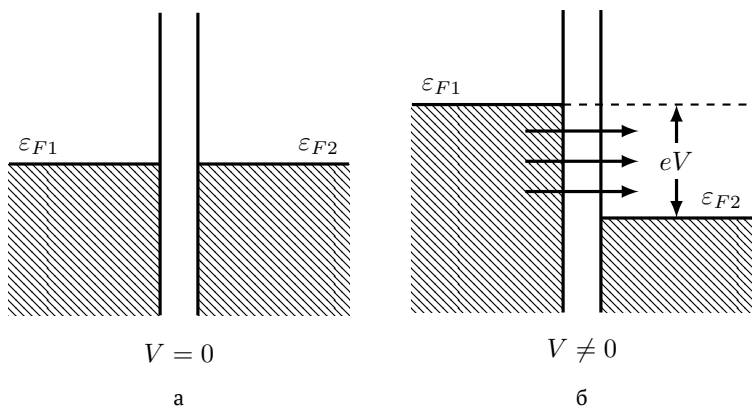


Рис. 13. Энергетическая диаграмма для случая туннельного контакта двух нормальных металлов при $T = 0$: (а) $V = 0$, (б) $V \neq 0$, идет туннельный ток, пропорциональный приложенной разности потенциалов V .

зрачность барьера), $N_1(0)$, $N_2(0)$ — плотности состояний вблизи уровня Ферми в первом и втором электродах. Интеграл в выражении (64) равен eV при любом значении температуры (как и при $T = 0$, когда распределение (62) принимает форму ступени):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{f(\varepsilon) - f(\varepsilon + eV)\} d\varepsilon = eV, \quad (65)$$

$$j = \left(\frac{4\pi e}{\hbar}\right) N_1(0)N_2(0) \langle |H_T|^2 \rangle eV. \quad (66)$$

Поэтому в результате мы получаем закон Ома:

$$j_{NN} = \left(\frac{4\pi e^2}{\hbar}\right) N_1(0)N_2(0) \langle |H_T|^2 \rangle \cdot V = \frac{V}{R_T}, \quad (67)$$

где R_T — туннельное сопротивление:

$$R_T = \left\{ \left(\frac{4\pi e^2}{\hbar}\right) N_1(0)N_2(0) \langle |H_T|^2 \rangle \right\}^{-1}. \quad (68)$$

Туннельное сопротивление R_T является не только коэффициентом пропорциональности между напряжением и током, но точно так же, как и обычное сопротивление, описывает диссипацию при протекании туннельного тока. Туннелирование электрона происходит без изменения его энергии, но каждый такой акт сопровождается последующей диссипацией энергии. Кристаллическая решетка одного электрода поглощает фонон, отдаваемый электроном, который опускается с уровня Ферми в дырку, образовавшуюся после туннелирования электрона из этого электрода. Решетка второго электрода также поглощает фонон, отдаваемый электроном, совершившим туннелирование, при его последующим опускании на уровень Ферми в этом электроде.

Рассмотрим теперь случай, когда первый электрод сделан из нормального металла, а второй электрод является сверхпроводником, т. е. NIS структурой. Конденсат куперовских пар присутствует только в одном электроде, поэтому туннелировать могут только одиночные (нормальные) электроны в каждую сторону: из N электрода в S электрод, создавая в нем элементарное возбуждение, и из S электрода в N электрод, также создавая в S электроде элементарное возбуждение. Для описания таких процессов наиболее удобно использовать полупроводниковую модель спектра элементарных возбуждений в сверхпроводнике, как показано на рис. 14. В силу существования запрещенной зоны 2Δ между зонами дырочных и электронных элементарных возбуждений в сверхпроводнике при $T = 0$ туннельный ток через NIS контакт отсутствует в диапазоне напряжений $|V| < \Delta/e$, так как в процессе акта туннелирования энергия частицы не может меняться. Туннелирование электронов становится возможным, когда приложено напряжение $|V| \geq \Delta/e$. Показанные на рис. 14б и 14в энергетические диаграммы относятся соответственно к случаям, когда отсчитанная от N электрода разность потенциалов между электродами $V > +\Delta/e$ (электроны туннелируют в S электрод) и $V < -\Delta/e$ (электроны туннелируют в N электрод).

Вольт-амперная характеристика (ВАХ) туннельной NIS структуры представляет собой антисимметричную функцию. Для расчета туннельного тока в области условно положительных напряжений, когда $V \geq \Delta/e$, при $T = 0$ (ступенчатый вид функции распределения Ферми — Дирака) можно так

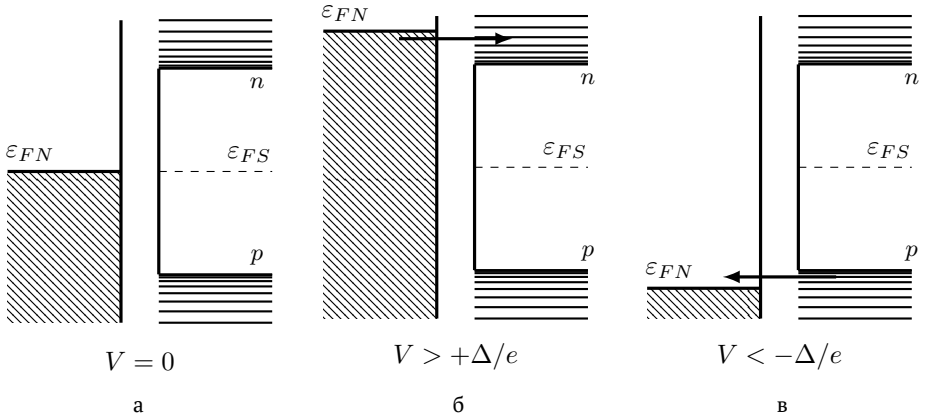


Рис. 14. Энергетическая диаграмма для случая туннельного контакта нормального металла и сверхпроводника при $T = 0$: (а) $V = 0$; (б) $V \neq 0$, происходит туннелирование электронов из N в S; (в) $V \neq 0$, происходит туннелирование электронов из S в N.

же использовать формулу (66), в которой подсчет туннельных актов должен быть выполнен с учетом плотности (47) энергетических уровней одночастичных возбуждений в сверхпроводнике $\rho(E)$. Для этого множитель $N_1(0)N_2(0)eV$ в формуле для тока должен быть заменен на фактор

$$Y_{NS} = N_1(0) \int_{\Delta}^{eV-\Delta} \rho(E) dE = N_1(0)N_2(0) \sqrt{(eV)^2 - \Delta^2}. \quad (69)$$

Таким образом, получаем следующее выражение для плотности туннельного тока в области положительных напряжений $V \geq \Delta/e$ (при $T = 0$):

$$j_{NS}(V) = \left(\frac{4\pi e^2}{\hbar} \right) \langle |H_T|^2 \rangle N_1(0)N_2(0) \sqrt{V^2 - \left(\frac{\Delta}{e} \right)^2}. \quad (70)$$

Вблизи точки возникновения тока, когда $V \gtrsim \Delta/e$, корень в выражении (70) можно представить приближенно в виде:

$$\sqrt{\left(V - \frac{\Delta}{e}\right) \left(V + \frac{\Delta}{e}\right)} \approx \left(\sqrt{\frac{2\Delta}{e}}\right) \sqrt{\left(V - \frac{\Delta}{e}\right)}, \quad (71)$$

т.е. график тока в этой области напряжения выглядит как график квадратного корня из напряжения $V^* = V - \Delta/e$, т.е. корня из напряжения, отсчитанного от пороговой величины Δ/e . В то же время, при больших значениях напряжения V данный корень стремиться к величине V .

Вольт-амперная характеристика (ВАХ) туннельного NIS контакта при $T = 0$ показана на рис. 15 для условно положительного напряжения. Из-за сильно неоднородной плотности состояний элементарных возбуждений, имеющей особенности вблизи границ зон дырочных и электронных возбуждений, возникающий туннельный ток резко нарастает в области $|V| \gtrsim \Delta/e$ и затем с ростом тока приближается к линейной асимптоте $I = V/R_T$. Это объясняется тем, что плотность состояний элементарных возбуждений в сверхпроводнике, дополнительно вовлекаемых в процессы туннелирования (по мере увеличения напряжения), приближается к значению плотности состояний $N(0)$ в нормальном проводнике.

При ненулевой температуре ($T > 0$), когда распределение Ферми — Дирака по энергии для электронов и одночастичных возбуждений (ступенчатое при нулевой температуре) становится более плавным, появляется вероятность туннельных актов в области $|V| < \Delta/e$. Поэтому в области «щелевого» напряжения $|V| \simeq \Delta/e$ будет наблюдаться размытие (закругление) ВАХ, увеличивающееся с ростом температуры, т.е. начинающееся при более низких напряжениях.

Наконец, рассмотрим туннельную структуру «сверхпроводник — изолятор — сверхпроводник» (SIS). В этой структуре возможно туннелирование как одиночных (нормальных) электронов, так и пар «сверхпроводящих» электронов. Совокупность (конденсат) куперовских пар в сверхпроводнике является когерентной, то есть описывается единой волновой функцией. Взаимодействие волновых функций сверхпроводящих электродов и тунне-

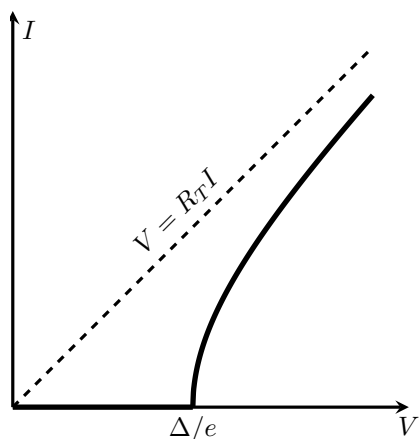


Рис. 15. Вольт-амперная характеристика (ВАХ) туннельного перехода NIS (нормальный металл — изолятор — сверхпроводник) при температуре $T = 0$.

лирование волнового поля в такой структуре приводят к протеканию сверхпроводящего тока. При этом процесс парного туннелирования «сверхпроводящих» электронов не является идеально одновременным, поскольку туннелирование электронов из состояний k и $-k$ происходит по одному электрону, а возбуждения, возникающие в сверхпроводниках S_1 и S_2 , являются виртуальными, т.е. существующими в течение короткого периода между туннелированием первого и второго электронов пары. Сверхпроводящая компонента тока через SIS контакт рассматривается более подробно в дальнейших разделах в рамках эффекта Джозефсона.

В этом разделе будем рассматривать только туннелирование нормальных носителей заряда, которые в сверхпроводнике представлены электронными и дырочными возбуждениями (квазичастицами). Для описания этих процессов используем полупроводниковую модель спектра элементарных возбуждений в каждом из двух сверхпроводящих электродов, как показано на рис. 16. Из этого рисунка видно, что при $T = 0$ туннельный ток в такой структуре отсутствует в диапазоне напряжений $|V| < \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)}{e}$. При наличии разности потенциалов $|V| \geq \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)}{e}$ протекает туннельный ток: электроны

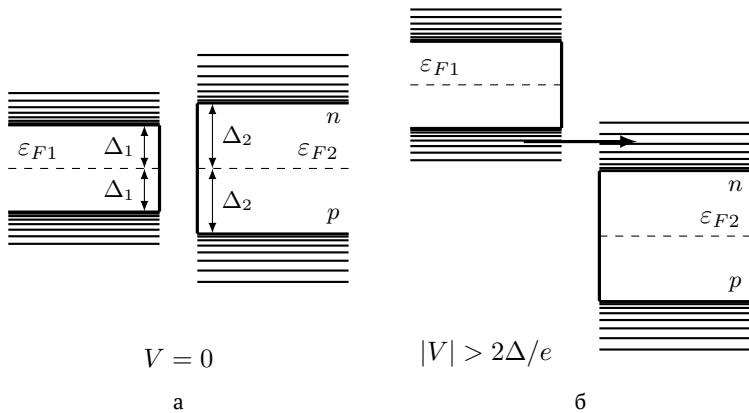


Рис. 16. Энергетическая диаграмма для туннельного SIS контакта (сверхпроводник — изолятор — сверхпроводник) при нулевой температуре ($T = 0$) с использованием полупроводниковой модели спектра электронных (n) и дырочных (p) возбуждений в сверхпроводнике, когда (а) отсутствует разность потенциалов $V = 0$; (б) разность потенциалов $|V| > 2\Delta/e$, электроны туннелируют из заполненной зоны дырочных возбуждений одного электрода в пустую зону электронных возбуждений другого электрода.

туннелируют из заполненной зоны дырочных возбуждений одного электрода в пустую зону электронных возбуждений другого электрода.

Квазичастичная ВАХ туннельной SIS структуры, так же, как и рассмотренной выше NIS структуры, имеет антисимметричный вид. Для расчета туннельного тока электронов при $T = 0$ (ступенчатый вид функции распределения Ферми — Дирака) из области квазичастичных возбуждений дырочного типа одного сверхпроводника в область квазичастичных возбуждений электронного типа другого сверхпроводника при $|eV| \geq (\Delta_1 + \Delta_2)$ можно также использовать формулу (66) в которой подсчет туннельных актов должен быть выполнен с учетом плотности (47) энергетических уровней одночастичных возбуждений в каждом из сверхпроводящих электродов. Для этого необходимо заменить множитель $N_1(0)N_2(0)eV$ на фактор

$$Y_{SS} = \int_{\Delta_1}^{\Delta_1 + e\delta V} \rho_1(E)\rho_2(eV - E)dE, \quad (72)$$

где $e\delta V = eV - (\Delta_1 + \Delta_2)$, $\rho_1(E)$ и $\rho_2(eV - E)$ — распределения, даваемые формулой (47). Таким образом, получаем следующее выражение для плотности туннельного тока в области условно положительных напряжений $V \geq (\Delta_1 + \Delta_2)/e$ (при $T = 0$):

$$j_{SS}(V) = \left(\frac{4\pi e}{\hbar} \right) \langle |H_T|^2 \rangle N_1(0)N_2(0) \int_{\Delta_1}^{\Delta_1 + e\delta V} \frac{E(eV - E) dE}{\sqrt{E^2 - \Delta_1^2} \sqrt{(eV - E)^2 - \Delta_2^2}}. \quad (73)$$

Для случая одинаковых сверхпроводников и в области небольшого превышения щелевого напряжения, когда $e\delta V \ll 2\Delta$, вычисление (72) приводит к следующему результату:

$$Y_{SS} \approx N^2(0)\pi(\Delta + e\delta V)/2. \quad (74)$$

Полученное выражение описывает скачкообразное возникновение тока величиной $I_0 = (\pi\Delta/2e)R_T^{-1}$ при достижении пороговой разности потенциалов $V = 2\Delta/e$, когда $e\delta V = 0$. После этого скачка начинается рост тока с увеличением δV , соответствующий величине дифференциального сопротивления $2R_T/\pi$. В дальнейшем, по мере увеличения напряжения, дифференциальное сопротивление постепенно изменяется и происходит асимптотический выход на линейную зависимость $I = (R_T)^{-1}V$, где R_T — туннельное сопротивление (68) рассматриваемой структуры в нормальном состоянии.

На рис. 17 показана квазичастичная ВАХ SIS контакта с электродами из одинаковых сверхпроводников для условно положительного напряжения при нулевой температуре ($T = 0$). Поскольку в каждой из зон элементарных возбуждений, из которой туннелируют электроны и в которую они попадают, плотности состояний элементарных возбуждений имеют особенности вблизи границы зоны при $|V| = 2\Delta/e$. Когда эти особенности совмещаются, туннельный ток возникает более резко, чем в NIS структуре. По мере увеличения напряжения ВАХ рассматриваемой структуры, так же, как и ВАХ NIS структуры, приближается к линейной асимптоте $I = V/R_T$.

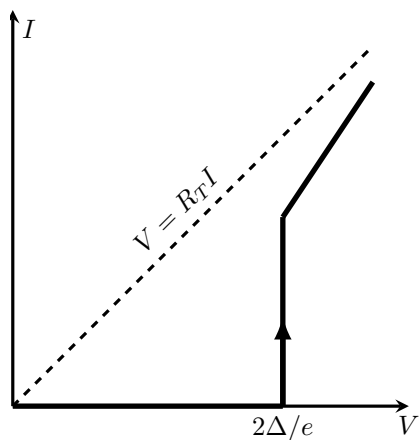


Рис. 17. Квазичастичная ВАХ туннельной структуры SIS (сверхпроводник — изолятор — сверхпроводник) при температуре $T = 0$.

При ненулевой температуре ($T > 0$) распределение Ферми-Дирака по энергии для одночастичных возбуждений в сверхпроводниках становится «размазанным», и появляется вероятность туннельных актов в области $|V| < 2\Delta/e$. Поэтому в области «щелевого» напряжения SIS контакта $|V| \simeq 2\Delta/e$ будет наблюдаться размытие (закругление) ВАХ, увеличивающееся с ростом температуры, т.е. начинающееся при более низких напряжениях. Кроме того, в случае разных величин энергетической щели сверхпроводящих электродов ($\Delta_1 \neq \Delta_2$) на ВАХ образуется небольшая особенность (незначительный пик тока) при значениях напряжения, соответствующих разности щелей $|V_-| = |\Delta_1 - \Delta_2|/e$. В этом случае напротив друг друга оказываются границы одноптипных энергетических зон в сверхпроводниках, т.е. границы или электронных, или дырочных возбуждений с особенностями плотности одноптипных возбуждений. Это дает «всплеск» туннельного тока из одного электрода в другой в силу разной заполненности этих ступенчатых уровней в первом и втором электродах согласно распределению Ферми — Дирака.

1.10 Эффект квантования магнитного потока

Рассмотрим сплошной сверхпроводник, который имеет цилиндрическую полость как показано на рис. 18. Выберем внутри сверхпроводника произвольный контур C , который охватывает полость и проходит всюду внутри сверхпроводника на расстояниях от границы полости, много больших лондоновской глубины проникновения λ . Тогда в любой точке этого контура плотность сверхпроводящего тока $j_s = 0$, и контурный интеграл от обеих частей обобщенного уравнения Лондонов для плотности сверхпроводящего тока

$$j_s = \frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \mathbf{A} \right) \quad (75)$$

по этому контуру сведется к выражению:

$$\frac{\Phi_0}{2\pi} \oint \nabla \theta dl = \oint \mathbf{A} dl, \quad (76)$$

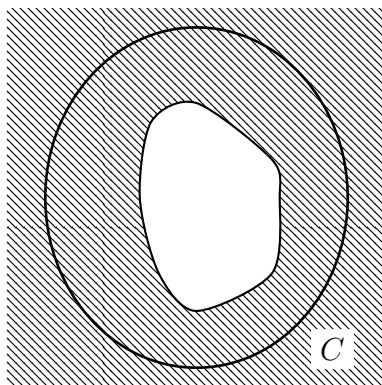


Рис. 18. В сплошном сверхпроводнике (заштриховано) имеется цилиндрическая полость. Контур C проходит всюду внутри сверхпроводника на расстояниях от границы полости много больших лондоновской глубины проникновения λ .

где $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$, h — постоянная Планка, e — заряд электрона. Поскольку в силу замкнутости контура

$$\oint \nabla \theta d\mathbf{l} = 2\pi n, \quad (77)$$

а также на основании теоремы Стокса

$$\oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int \text{rot}(\mathbf{A}) ds = \Phi, \quad (78)$$

где Φ — полный магнитный поток через площадь, охватываемую контуром C , получаем выражение

$$\Phi = n\Phi_0, \quad (79)$$

из которого следует, что магнитный поток в полости (точнее — магнитный поток, который охватывается контуром C) может принимать только значения, кратные кванту магнитного потока

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2,07 \cdot 10^{-15} \text{ Вб}. \quad (80)$$

2 Эффект Джозефсона

Эффект Джозефсона (предсказанный теоретически в 1962 г. [6]) наблюдается в слабых электрических контактах сверхпроводников (относительно массивных, чтобы небольшой ток через слабую связь не возмущал параметр порядка в глубине этих электродов). Такой электрический контакт двух сверхпроводников называется джозефсоновским переходом или контактом (*англ.*: Josephson junction).

На рис. 19 схематически показан слабый электрический контакт двух сверхпроводящих образцов («электродов»), в котором возникает эффект Джозефсона [7–9]. Этот эффект математически представлен совокупностью двух уравнений, которые будут рассматриваться и обсуждаться ниже.

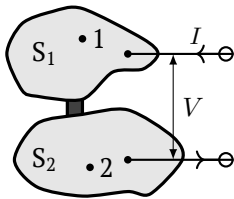


Рис. 19. Два массивных сверхпроводника (S_1 и S_2), между которыми существует слабая электрическая связь, что приводит к появлению эффекта Джозефсона.

Джозефсоновский контакт (джозефсоновский переход) может иметь различные конфигурации; единственным существенным требованием к нему является малость его длины d , т.е. расстояния между ближайшими точками электродов (грубо, $d \lesssim 10^{-5}$ см). Если это условие выполнено, то ток I , текущий через слабый контакт (джозефсоновский переход) из электрода, который обозначен на рис. 19 как электрод S_1 , во второй электрод S_2 , содержит «сверх-

ток» I_s , который является функцией не от напряжения V , а является 2π -периодической функцией от разности фаз волновых функций Бозе-конденсата куперовских пар в электродах, которую принято называть *джозефсоновской фазой*:

$$\varphi = \theta_1 - \theta_2. \quad (81)$$

Разумеется, сверхпроводящий ток, т.е. ток куперовских пар, должен зависеть от квадрата модуля волновой функции $|\Psi|^2$, т.е. от плотности куперовских пар в сверхпроводниках. Однако, если ток достаточно слабый, из-

менять эти величины он не может, а может изменять только фазы волновых функций θ_1 и θ_2 . Поскольку фазы определены с точностью до константы, физически однозначная величина I_s может быть связана только с физически однозначной разностью фаз $\varphi = \theta_1 - \theta_2$. Далее, изменение любой из этих двух фаз на 2π приводит к такой же волновой функции. Следовательно, $I_s(\varphi)$ может быть только 2π -периодической функцией. Наконец, в отсутствие тока электроды образуют как бы единый сверхпроводник, и фазы θ_1 и θ_2 должны совпадать, т.е. $I_s(0) = 0$. Таким образом, в общем виде $I_s(\varphi)$ можно записать [8; 9] как

$$I_s = I_c \sin(\varphi) + \sum_m I_m \sin(m\varphi). \quad (82)$$

В большинстве случаев всеми членами, кроме первого, можно пренебречь, и тогда **первое уравнение Джозефсона** принимает вид:

$$I_s = I_c \sin(\varphi), \quad (83)$$

где I_c — некоторая константа (существенно зависящая от физической природы и размеров слабой связи), обычно называемая критическим током джозефсоновского перехода. *Эта константа положительна, если считать ток положительным при его направлении от электрода S_1 к электроду S_2 , когда $\varphi = \theta_1 - \theta_2$.*

Постоянный ток $I < I_c$ протекает через джозефсоновский переход без диссипации, так как переносится полностью сверхпроводящей компонентой тока (т.е. током куперовских пар электронов): $I = I_s = I_c \sin(\varphi)$. Это явление часто называют **стационарным эффектом Джозефсона**.

Второе уравнение Джозефсона устанавливает связь между производной джозефсоновской фазы $d\varphi/dt$ и падением напряжения V на джозефсоновском переходе, т.е. разностью потенциалов, отсчитанной от электрода S_2 :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2e}{\hbar} \cdot V. \quad (84)$$

Рассмотрим точки 1 и 2, лежащие внутри любых двух сверхпроводников (например, электродов джозефсоновского перехода, как показано на

рис. 19). Для получения выражения (84) запишем уравнение (41) для фазы волновой функции, которое в стационарном состоянии следует из уравнения Шредингера, для каждой из этих точек в сверхпроводниках:

$$\hbar \cdot \frac{d\theta_1}{dt} = -E_1, \quad (85)$$

$$\hbar \cdot \frac{d\theta_2}{dt} = -E_2. \quad (86)$$

Вычитаем из (86) уравнение (85) друг из друга и получаем выражение:

$$\hbar \cdot \frac{d\varphi}{dt} = E_2 - E_1. \quad (87)$$

В правой части этого уравнения стоит разность энергий куперовской пары с электрическим зарядом $(-2e)$ в точках 1 и 2. Такая разность может быть отличной от нуля, если между этими точками существует разность электрохимических потенциалов, заданная (с учетом знака заряда куперовской пары) напряжением V :

$$E_2 - E_1 = 2eV. \quad (88)$$

Объединяя равенства (87) и (88), приходим к джозефсоновскому уравнению (84). Это соотношение следует непосредственно из уравнения Шредингера и поэтому должно выполняться с высокой точностью. И действительно, проверка с помощью эффекта Джозефсона показала, что коэффициент пропорциональности между $d\varphi/dt$ и V одинаков для различных образцов с точностью не хуже $\sim 10^{-16}$, а для различных значений напряжения V (различающихся примерно в 10^2 раз) — с точностью не хуже $\sim 10^{-6}$ [7–9].

В случае, когда постоянный ток I , пропускаемый через джозефсоновский переход, превышает критический ток джозефсоновского элемента ($I > I_c$), в переносе тока через джозефсоновский переход участвуют как сверхпроводящая компонента тока I_s , так и нормальная компонента тока I_N , появление которой приводит к появлению напряжения на этом джозефсоновском элементе. В силу джозефсоновского соотношения (84), возникшее напряжение заставляет изменяться джозефсоновскую фазу φ и, следовательно, сверхпроводящую компоненту тока (83). Поэтому обе компо-

ненты тока (I_s и I_N) осциллируют в противофазе, перенося в сумме пропускаемый постоянный ток $I > I_c$. Осцилляции падения напряжения, обусловленные осцилляциями нормальной компоненты тока, принято называть **джозефсоновской генерацией**. Круговая частота джозефсоновской генерации строго пропорциональна постоянной составляющей напряжения на джозефсоновском элементе \bar{V} . Это следует непосредственно из уравнения (84) в результате усреднения его правой и левой частей:

$$\Omega = \frac{2e}{\hbar} \cdot \bar{V} \equiv \frac{2\pi}{\Phi_0} \cdot \bar{V}, \quad (89)$$

где $\Phi_0 = h/2e \approx 2 \cdot 10^{-15}$ Вб — квант магнитного потока.

Неизменность и точность коэффициента пропорциональности между Ω и \bar{V} в этом выражении, как и в самом уравнении (84), не хуже $\sim 10^{-16}$. Это было проверено экспериментально с использованием эффекта Джозефсона (см. ссылки на экспериментальные исследования в [7–9]).

Такое состояние джозефсоновского перехода, которое характеризуется существованием *постоянной* составляющей напряжения на джозефсоновском элементе в режиме джозефсоновской генерации, называется **резистивным состоянием** джозефсоновского перехода. При наличии емкости C существует также протекающая через нее компонента переменного тока $I_D = C \cdot dV/dt$, существенно влияющая на форму и амплитуду осцилляций напряжения вследствие изменения спектрального состава нормальной компоненты тока.

Следует также обратить внимание на то, что согласно уравнениям (83) и (84) все переходные процессы в сверхпроводящем состоянии ($I < I_c$) джозефсоновских переходов, когда изменяется величина сверхпроводящей компоненты тока $I_s = I_c \sin(\varphi)$ и, следовательно, фаза φ , сопровождаются возникновением напряжения:

$$V(t) = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right) \frac{d\varphi}{dt}. \quad (90)$$

2.1 Основные типы джозефсоновских переходов

Слабая электрическая связь между сверхпроводящими электродами может быть реализована (i) через тонкий слой нормального металла (SNS структура), (ii) тонкий слой диэлектрика, более тонкий, чем слой нормального металла (SIS структура), (iii) короткую и узкую сверхпроводящую область в виде «мостика» между двумя частями пленки из сверхпроводника или (iv) точечный контакт, образованный заостренным сверхпроводящим электродом (иглой), упирающимся в поверхность другого сверхпроводящего электрода (первые реализованные джозефсоновские контакты). Примеры джозефсоновских структур, которые могут быть созданы на основе пленочной технологии (в настоящее время, как правило, с использованием Nb с критической температурой $T_c = 9,25$ K) показаны на рис. 20.

Критический ток джозефсоновских переходов зависит от типа и размеров слабой связи. Ниже рассмотрены величины плотности критического тока j_c для джозефсоновского перехода в виде короткого пленочного мостика, SNS сэндвича и туннельного SIS перехода.

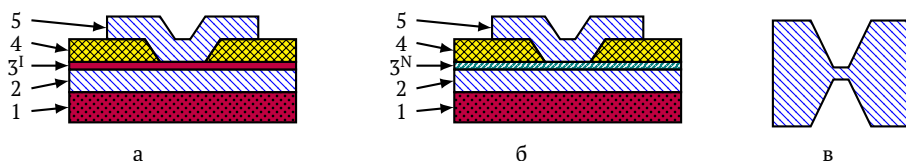


Рис. 20. Примеры джозефсоновских переходов, формируемых на основе пленочной технологии: (а) туннельный джозефсоновский переход (сечение) «сверхпроводник — диэлектрик — сверхпроводник» (SIS); (б) джозефсоновский переход (сечение) «сверхпроводник — нормальный проводник — сверхпроводник» (SNS); (в) джозефсоновский переход в виде короткого узкого пленочного мостика. Обозначения слоев: 1 — подложка; 2 — нижняя пленка сверхпроводника; 3^I — тонкий слой окисла (диэлектрика) для SIS структур или 3^N — тонкий слой нормального проводника для SNS структур; 4 — слой диэлектрической пленки; 5 — верхняя пленка сверхпроводника.

2.1.1 Короткий пленочный мостик длиной $L \ll \xi$

Пусть мостик настолько короткий, что его длина $L \ll \xi$ (где ξ — длина когерентности) (см. рис. 21). Применим к такому сверхпроводниковому объекту первое уравнение теории Гинзбурга — Ландау:

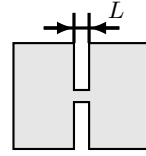


Рис. 21. Короткий мостик длиной $L \ll \xi$ соединяет широкие части сверхпроводящей пленки S_1 и S_2 .

$$\xi^2 \left[i\nabla + \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \right) \mathbf{A} \right]^2 \psi - \psi + \psi |\psi|^2 = 0, \quad (91)$$

где $\psi = \Psi / |\Psi_0|$ — нормированная волновая функция (параметр порядка) сверхпроводящего конденсата куперовских пар, $|\Psi_0|^2 = |\alpha|/\beta = n_s^* = n_s/2$ — плотность куперовских пар электронов (n_s — плотность «сверхпроводящих» электронов, образующих куперовские пары) в глубине сверхпроводника, где отсутствуют магнитное поле и электрический ток, $\xi = \hbar^2 / (4m|\alpha|)$ — длина когерентности, α и $\beta/2$ — коэффициенты разложения по степеням $|\Psi|^2$ величины разности плотности свободной энергии сверхпроводника в сверхпроводящем и нормальном состояниях [2], m — масса электрона, λ — лондоновская глубина проникновения, \mathbf{A} — вектор-потенциал магнитного поля.

Поскольку сверхпроводящий ток через слабую связь между сверхпроводниками является малым, то его магнитным полем можно пренебречь. Тогда в отсутствие магнитного поля (как внешнего поля, так и собственного поля тока) первое уравнение Гинзбурга — Ландау принимает вид:

$$-\xi^2 \nabla^2 \psi - \psi + \psi |\psi|^2 = 0. \quad (92)$$

В случае короткого мостика существенное изменение параметра порядка происходит только на длине мостика L , поэтому можно сделать следующую оценку $\nabla^2 \psi$ для данного случая:

$$\nabla^2 \psi \sim \psi / L^2. \quad (93)$$

С другой стороны, сама величина параметра порядка $|\psi| \sim 1$. Поэтому первый член в уравнении (92) будет главным, так как его порядок $\xi^2/L^2 \gg 1$, в то время как все остальные слагаемые порядка единицы. Поэтому уравнение (92) можно упростить до вида

$$\nabla^2 \psi = 0. \quad (94)$$

Пусть далеко от мостика в одной части пленки параметр порядка равен

$$\psi_1 = |\psi_1| e^{i\theta_1}, \quad (95)$$

а в другой части пленки параметр порядка равен

$$\psi_2 = |\psi_2| e^{i\theta_2}. \quad (96)$$

Здесь $|\psi_1|, |\psi_2|, \theta_1, \theta_2$ — постоянные величины, не зависящие от координат.

На самом мостике происходит интерференция этих двух волновых функций. Решение уравнения (94) ищем в виде

$$\psi(r) = |\psi_1| e^{i\theta_1} f(r) + |\psi_2| e^{i\theta_2} (1 - f(r)), \quad (97)$$

где $f(r) \rightarrow 1$ в глубине пленки S_1 , и $f(r) \rightarrow 0$ в глубине пленки S_2 . Подставляя это выражение в уравнение (94), получаем уравнение для функции $f(r)$:

$$\nabla^2 f(r) = 0, \quad (98)$$

согласно которому $\nabla f(r) = \text{const}$. Следовательно, в соответствии с условиями, наложенными на эту функцию, $\nabla f(r) = \text{const} = -1/L$.

Плотность сверхпроводящего тока j_s вычисляем из второго уравнения Гинзбурга — Ландау:

$$\mu_0 j_s = \text{rot}(\text{rot} \mathbf{A}) = -i \left[\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \right] (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{|\psi|^2 \mathbf{A}}{\lambda^2}. \quad (99)$$

Поскольку разность двух комплексно-сопряженных величин равна удвоенной величине мнимой части, выражение для плотности сверхпроводящего

тока в рассматриваемом случае $\mathbf{A} = 0$ принимает следующий вид:

$$j_s = \left[\frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0\lambda^2} \right] \cdot \Im(\psi^*\nabla\psi). \quad (100)$$

Используя выражение (97), получаем:

$$\Im(\psi^*\nabla\psi) = |\psi_1| |\psi_2| \nabla f \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2). \quad (101)$$

Поэтому

$$j_s = \left\{ \frac{\Phi_0 |\psi_1| |\psi_2| \nabla f}{2\pi\mu_0\lambda^2} \right\} \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2). \quad (102)$$

Подстановка отрицательной величины ∇f приводит к окончательному выражению для плотности сверхпроводящей компоненты тока:

$$j_s = \left\{ \frac{\Phi_0 |\psi_1| |\psi_2|}{2\pi\mu_0\lambda^2 L} \right\} \cdot \sin(\theta_2 - \theta_1) = j_c \sin(\varphi), \quad (103)$$

где

$$j_c = \frac{\Phi_0 |\psi_1| |\psi_2|}{2\pi\mu_0\lambda^2 L} \cong \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0\lambda^2 L} \quad (104)$$

— критическая плотность сверхпроводящей компоненты тока, $\varphi = \theta_2 - \theta_1$ — джозефсоновская фаза, положительная величина которой соответствует протеканию сверхпроводящего тока через пленочной мостик из части S_2 сверхпроводящей пленки в часть S_1 . В выражении (104) индивидуальные свойства сверхпроводника проявляются через множитель $1/\lambda^2$, который пропорционален плотности n_s «сверхпроводящих» электронов в сверхпроводнике:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{2\mu_0 e^2 |\alpha|}{m\beta} = \frac{\mu_0 e^2 n_s}{m}. \quad (105)$$

2.1.2 Переход сверхпроводник — нормальный металл — сверхпроводник (SNS)

В силу эффекта близости на каждой из S-N границ, внутри нормального слоя нормированную волновую функцию можно записать в виде суперпо-

зиции

$$\psi(r) = |\psi_2| e^{i\theta_2} e^{-x/\xi_N} + |\psi_1| e^{i\theta_1} e^{(x-d)/\xi_N}, \quad (106)$$

где $|\psi_1|^2$ и $|\psi_2|^2$ — нормированные плотности конденсатов куперовских пар, индуцированных на границах нормального слоя, ξ_N — длина когерентности в нормальном слое. Для упрощения расчетов будем считать сверхпроводники одинаковыми и, следовательно, $|\psi_1| = |\psi_2| = |\psi|$, а фазы θ_1 и θ_2 равными фазам соответствующих волновых функций в сверхпроводниках. Выполняя далее вычисления, получаем

$$\Im [\psi^*(r) \nabla \psi(r)] = 2\xi_N^{-1} |\psi|^2 \exp\left(-\frac{d}{\xi_N}\right) \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2). \quad (107)$$

Подставляя этот результат во второе уравнение Гинзбурга — Ландау (100) при $\mathbf{A} = 0$, получаем выражение для плотности сверхпроводящего тока:

$$j_s = \left[\frac{\Phi_0}{\pi \mu_0 \lambda^2} \right] \cdot \xi_N^{-1} |\psi|^2 \exp\left(-\frac{d}{\xi_N}\right) \cdot \sin(\varphi) = j_c \sin(\varphi), \quad (108)$$

где $\varphi = \theta_1 - \theta_2$ — джозефсоновская фаза, j_c — плотность критического тока:

$$j_c = \left[\frac{\Phi_0 |\psi|^2}{\pi \mu_0 \lambda^2 \xi_N} \right] \cdot e^{-d/\xi_N}, \quad (109)$$

где, как и в пленочном мостике, индивидуальные свойства сверхпроводников, образующих SNS переход, проявляются через множитель $1/\lambda^2$, который пропорционален плотности куперовских пар в сверхпроводнике.

2.1.3 Джозефсоновский туннельный переход (SIS)

Будем далее рассматривать систему куперовских пар в туннельном джозефсоновском переходе как двухуровневую квантовомеханическую систему (согласно [2]). В основном состоянии куперовские пары могут находиться на энергетическом уровне E_1 в первом сверхпроводнике и на уровне E_2 во втором сверхпроводнике. В отсутствие приложенного напряжения (или напряжения, возникающего, когда ток I через джозефсоновский переход превышает величину критического тока I_c) энергетические уровни E_1 и E_2

будут совпадать, а при наличии разности потенциалов V между электродами эти уровни будут отличаться на величину $2eV$. В общем случае *стационарного состояния* системы, которая может находиться только в двух дискретных состояниях, уравнение Шредингера для этой системы

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}_0 \psi \quad (110)$$

имеет своим решением собственные волновые функции

$$\psi_k(r, t) = \psi_k(r) \cdot e^{-i \frac{E_k}{\hbar} t} \equiv \psi_k(r) \cdot e^{i\theta_k}, \quad (111)$$

где $\theta_k = -(E_k/\hbar)t$, $k = 1, 2$, а энергия E_k и $\psi_k(r)$ — собственное значение и собственная функция стационарного уравнения Шредингера:

$$\hat{H}_0 \psi_k(r) = E_k \psi_k(r). \quad (112)$$

Поэтому общее состояние двухуровневой системы можно представить в виде разложения по волновому базису двух ортонормированных функций:

$$\Psi = C_1 \psi_1(r) e^{i\theta_1} + C_2 \psi_2(r) e^{i\theta_2}, \quad (113)$$

где C_1 и C_2 — амплитуды состояний на уровнях 1 и 2.

Учтем теперь возможность туннелирования волнового поля через потенциальный барьер между сверхпроводящими электродами. Для этого необходимо добавить к гамильтониану \hat{H}_0 оператор \hat{V}_T , отвечающий за эффект туннелирования, соответствующий слабой электрической связи между сверхпроводящими электродами:

$$\hat{H}_T = \hat{H}_0 + \hat{V}_T. \quad (114)$$

В этом случае амплитуды состояний в выражении (113) становятся функциями времени; общее состояние туннельной двухуровневой системы будет описываться волновой функцией

$$\Psi = C_1(t) \psi_1(r) e^{i\theta_1} + C_2(t) \psi_2(r) e^{i\theta_2}. \quad (115)$$

Подставим выражение (115) в уравнение Шредингера с гамильтонианом (114), чтобы найти закон изменения амплитуд состояний, обусловленный туннельным взаимодействием

$$i\hbar \frac{d}{dt} \sum C_k(t) \psi_k(r) e^{i\theta_k} = \left(\hat{H}_0 + \hat{V}_T \right) \sum C_k(t) \psi_k(r) e^{i\theta_k}, \quad (116)$$

где $k = 1, 2$. Умножим обе части уравнения на комплексно-сопряженную волновую функцию $\psi_m^*(r)$ и проинтегрируем по пространству, в котором может находиться куперовская пара (сверхпроводящие электроды). Тогда с учетом ортонормированности функций $\psi_k(r)$:

$$\int \psi_m^*(r) \psi_n(r) dr = \delta_{m,n} \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } m = n \\ 0, & \text{если } m \neq n \end{cases} \quad (117)$$

получаем следующий результат:

$$i\hbar \frac{d}{dt} (C_m(t) e^{i\theta_m}) = C_m(t) E_m e^{i\theta_m} + V_{m,k} C_k(t) e^{i\theta_k}, \quad (118)$$

где $k \neq m$, $k = 1, 2$, $m = 1, 2$, и матричный элемент

$$V_{m,k} = \int \psi_m^*(r) \hat{V}_T \psi_k(r) dr. \quad (119)$$

Будем считать, что в двухуровневой системе матричные элементы туннельного оператора равны; обозначим их величину через K :

$$V_{1,2} = V_{2,1} = K. \quad (120)$$

Уравнение (118) дает систему двух следующих уравнений (для $m = 1, 2$):

$$i\hbar \frac{d}{dt} C_1(t) - \hbar C_1(t) \frac{d}{dt} \theta_1 = C_1(t) E_1 + K C_2(t) e^{i(\theta_2 - \theta_1)}, \quad (121)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} C_2(t) - \hbar C_2(t) \frac{d}{dt} \theta_2 = C_2(t) E_2 + K C_1(t) e^{i(\theta_2 - \theta_1)}. \quad (122)$$

После разделения вещественной и мнимой частей, получаем систему уравнений:

$$\frac{d}{dt}\theta_1 = -\frac{E_1}{\hbar} - K \frac{C_2}{C_1 \hbar} \cos(\theta_2 - \theta_1), \quad (123)$$

$$\frac{d}{dt}\theta_2 = -\frac{E_2}{\hbar} - K \frac{C_1}{C_2 \hbar} \cos(\theta_1 - \theta_2), \quad (124)$$

$$\frac{d}{dt}C_1 = K \left[\frac{C_2}{\hbar} \right] \cdot \sin(\theta_2 - \theta_1), \quad (125)$$

$$\frac{d}{dt}C_2 = K \left[\frac{C_1}{\hbar} \right] \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2). \quad (126)$$

Для конденсата куперовских пар квадраты амплитуд C_1 и C_2 описывают плотность куперовских пар электронов в сверхпроводящих электродах S_1 и S_2 :

$$C_1^2 = n_{S_1}^*, \quad C_2^2 = n_{S_2}^*. \quad (127)$$

Поэтому уравнения (125) и (126) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}n_{S_1}^* = 2K \left[\frac{\sqrt{n_{S_1}^* n_{S_2}^*}}{\hbar} \right] \cdot \sin(\theta_2 - \theta_1), \quad (128)$$

$$\frac{d}{dt}n_{S_2}^* = 2K \left[\frac{\sqrt{n_{S_1}^* n_{S_2}^*}}{\hbar} \right] \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2). \quad (129)$$

Эти уравнения описывают изменение концентрации куперовских пар в электродах

$$\frac{d}{dt}n_{S_1}^* = -\frac{d}{dt}n_{S_2}^*, \quad (130)$$

когда пары электронов туннелируют из одного электрода в другой, т.е. протекает сверхпроводящий ток

$$j_s \propto \sin(\varphi). \quad (131)$$

Конечно, этот уход «сверхпроводящих» электронов из одного электрода в другой будет тотчас же компенсирован приходом новых электронов из источника тока в один электрод и уходом электронов из другого электрода в

источник тока. Величина критической плотности сверхпроводящего тока зависит от прозрачности туннельного барьера, которая определяет величину матричного элемента K , а также от плотности куперовских пар в сверхпроводящих электродах.

Второе уравнение (84) эффекта Джозефсона получаем в результате вычитания уравнения (124) из уравнения (123):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{(E_2 - E_1)}{\hbar} = \frac{2eV}{\hbar} \equiv \frac{2\pi}{\Phi_0} V, \quad (132)$$

где $\varphi = \theta_1 - \theta_2$, V — напряжение между электродами туннельного перехода (отсчитанное от электрода S_2), которое создает разность электрохимических потенциалов электродов и, следовательно, разность энергетических уровней куперовских пар (с зарядом $q = -2e$).

2.2 Энергия джозефсоновского перехода

Свободная энергия джозефсоновского перехода включает в себя энергию, обусловленную электрическим полем между его электродами $K = CV^2/2$ (где C — емкость), отсутствующую в стационарном сверхпроводящем состоянии ($V = 0$), и энергию созданного сверхпроводящего тока I_s , которая физически представляет собой кинетическую энергию куперовских пар (обусловленную их дрейфовой скоростью), переносящих сверхпроводящий ток. Энергия U_s сверхпроводящей компоненты тока равна работе, затраченной на «создание» этого сверхпроводящего тока: $U_s = A = \int I(t)V(t)dt$. Используя уравнения эффекта Джозефсона, получаем:

$$U_s = \int_0^t I_c \sin(\varphi) \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt} dt = \frac{\Phi_0 I_c}{2\pi} \int_0^\varphi \sin(\varphi) d\varphi = E_c \cdot (1 - \cos(\varphi)), \quad (133)$$

где E_c — характерная величина энергии джозефсоновского перехода:

$$E_c = \frac{\Phi_0 I_c}{2\pi}. \quad (134)$$

Таким образом, сверхпроводящий ток I_s , ведет себя как нелинейный «энергоемкий» элемент, т.е. *нелинейный реактивный* элемент, а именно, обладает свойством **нелинейной индуктивности**.

2.2.1 Индуктивность джозефсоновского перехода

Индуктивный характер сверхпроводящей компоненты тока $I_s = I_c \sin(\varphi)$ как реактивного элемента можно легко установить по виду зависимости импеданса джозефсоновского перехода от частоты в сверхпроводящем состоянии. Для этой цели рассмотрим импеданс джозефсоновского перехода для малого переменного тока $\tilde{I} \ll I_c$ при задании через джозефсоновский элемент тока $I = I_{dc} + \tilde{I}$, в котором постоянная составляющая $I_{dc} < I_c$. Представляя далее джозефсоновскую фазу в виде суммы постоянной составляющей $\bar{\varphi}$ и переменной составляющей $\tilde{\varphi}$, когда $\varphi = \bar{\varphi} + \tilde{\varphi}$, ток через джозефсоновский переход с емкостью C и сопротивлением R_N для нормальной компоненты тока, можно записать в следующем виде:

$$I_{dc} + \tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{R_N} + I_c \sin(\bar{\varphi} + \tilde{\varphi}) + C \frac{d\tilde{V}}{dt} \approx I_c \sin(\bar{\varphi}) + I_c \cos(\bar{\varphi}) \cdot \tilde{\varphi} + \frac{\tilde{V}}{R_N} + C \cdot \frac{d\tilde{V}}{dt}, \quad (135)$$

где \tilde{V} — переменное напряжение на джозефсоновском элементе, связанное с фазой джозефсоновского перехода уравнением (84). Это выражение можно разделить на два уравнения, соответственно, для постоянной и переменной составляющих тока:

$$I_{dc} = I_c \sin(\bar{\varphi}), \quad (136)$$

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{R_N} + I_c \cos(\bar{\varphi}) \cdot \tilde{\varphi} + C \cdot \frac{d\tilde{V}}{dt}. \quad (137)$$

Поскольку $d\varphi/dt = 2\pi V/\Phi_0$, для гармонического сигнала $\tilde{I} = I_a e^{i\Omega t}$, создающего падение напряжения $\tilde{V} = V_a e^{i\Omega t}$, получаем связь между комплексными амплитудами напряжения и тока:

$$I_a = \left[R_N^{-1} + \frac{2\pi I_c}{\Phi_0} \cdot \frac{\cos(\bar{\varphi})}{i\Omega} + i\Omega C \right] \cdot V_a, \quad (138)$$

которая соответствует импедансу параллельного включения резистора R_N , емкости C и индуктивности L_J :

$$L_J = \frac{\Phi_0}{2\pi I_c} \cdot \frac{1}{\cos(\bar{\varphi})} = \frac{L_c}{\cos(\bar{\varphi})}, \quad (139)$$

где L_c — характерная величина индуктивности джозефсоновского перехода:

$$L_c = \frac{\Phi_0}{2\pi I_c}. \quad (140)$$

2.2.2 Потенциальная энергия Гиббса системы с источником тока

Минимум свободной энергии F соответствует положению равновесия лишь для изолированной системы. В присутствии воздействия f , выполняющего роль обобщенной внешней силы, положение равновесия соответствует минимуму функции Гиббса $G = F - f \cdot x$, где x — обобщенная координата, соответствующая данной силе (произведение $f \cdot x$ — работа обобщенной внешней силы). В случае джозефсоновского перехода роль силы f играет внешний ток I , а роль x — канонически сопряженная ему величина:

$$x = \Phi = \frac{\hbar}{2e} \varphi. \quad (141)$$

Поэтому

$$f \cdot x = I\Phi = E_c i \varphi, \quad (142)$$

где E_c — характерная энергия (134), $i = I/I_c$ — нормированная величина тока. Таким образом, *потенциальная* составляющая энергии Гиббса для системы «джозефсоновский переход + источник тока»:

$$U(\varphi) = E_c (1 - \cos(\varphi) - i\varphi). \quad (143)$$

На рис. 22 показан профиль этой энергии для различных значений тока I , протекающего через джозефсоновский переход [8; 9]. При $|I| < I_c$ зависимость $U(\varphi)$ имеет вид «стиральной доски» с минимумами в точках

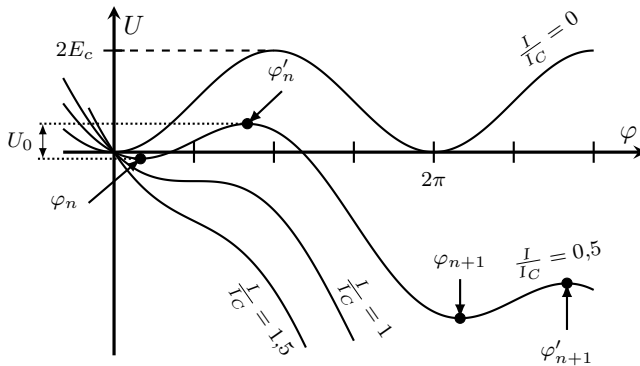


Рис. 22. Зависимость потенциальной составляющей $U(\varphi)$ энергии Гиббса джозефсоновского перехода с подключенным источником тока для различных значений тока I , протекающего через джозефсоновский переход.

$\varphi_n = \arcsin(i) + 2\pi n$ и максимумах в точках $\varphi'_n = \pi - \arcsin(i) + 2\pi n$. Состояния φ_n являются устойчивыми, а состояния φ'_n — неустойчивыми.

2.2.3 Плазменные колебания

Если емкость джозефсоновского перехода достаточно велика, то в нем могут происходить медленные затухающие колебания фазы на дне потенциальной ямы, то есть вблизи точек положения равновесия φ_n — так называемые «плазменные» колебания. Частоту этих колебаний можно найти из выражения для потенциальной составляющей энергии Гиббса, учитывая при этом как потенциальную энергию (133), так и кинетическую энергию

$$K = \frac{CV^2}{2} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2, \quad (144)$$

где μ — эффективная «масса» системы:

$$\mu = \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 C \equiv E_c L_J C \equiv \frac{E_c}{\Omega_0^2}. \quad (145)$$

При малых отклонениях фазы от равновесия $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t) - \varphi_n(t)$ кинетическая энергия в процессе осцилляций и потенциальная энергия, отсчитанная от точки равновесия, соответственно равны $K_{pl} = \mu (d\tilde{\varphi}(t)/dt)^2 / 2$ и $(U_{pl} = k(\tilde{\varphi}(t))^2 / 2$, где $k \equiv |\partial^2 U / \partial \varphi^2|_{\varphi_n} = E_c \cos(\varphi_n) = E_c \sqrt{1 - i^2}$. По аналогии, например, с пружинным маятником, имеющим массу μ и жесткость пружины k , частота собственных (в данном случае, «плазменных») колебаний

$$\Omega_p = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \Omega_0 (\cos(\varphi_n))^{1/2} = \Omega_0 (1 - i^2)^{1/4}, \quad (146)$$

где $\Omega_0 = 1/\sqrt{L_J C}$ — частота «плазменных» осцилляций при $i = 0$.

2.2.4 Резистивное состояние

Высота U_0 энергетического барьера, отделяющего одно устойчивое состояние от следующего, более низкого, минимума (см. рис. 22):

$$U_0 \equiv U(\varphi'_n) - U(\varphi_n) = 2E_c \left[(1 - i^2)^{1/2} - i \cdot \arccos(i) \right] \quad (147)$$

уменьшается до нуля при $|I| \rightarrow I_c$.

Когда величина тока $|I|$ оказывается больше критического тока, возникает резистивное состояние джозефсоновского перехода, в котором система начинает скользить вниз по «стиральной доске» (см. рис. 22) потенциального профиля энергии Гиббса (по «траектории», зависящей от величины емкости, то есть от эффективной «массы» системы), и возникают напряжения, осциллирующие во времени с круговой частотой (89) $\Omega = (2\pi/\Phi_0)\bar{V}$, где \bar{V} — постоянная составляющая напряжения на джозефсоновском переходе. В отсутствие емкости постоянный ток $|I| > I_c$ переносится суммой двух осциллирующих в противофазе компонент: сверхпроводящей компоненты тока I_S и нормальной компоненты тока I_N , как показано схематично на рис. 23. В этом процессе переменная составляющая сверхпроводящей компоненты тока замыкается посредством переменной составляющей нормальной компоненты тока (сумма этих переменных составляющих в токе через джозефсоновский элемент равна нулю); ток $|I| > I_c$ переносится суммой постоянных составляющих \bar{I}_S и \bar{I}_N сверхпроводящей и нормальной

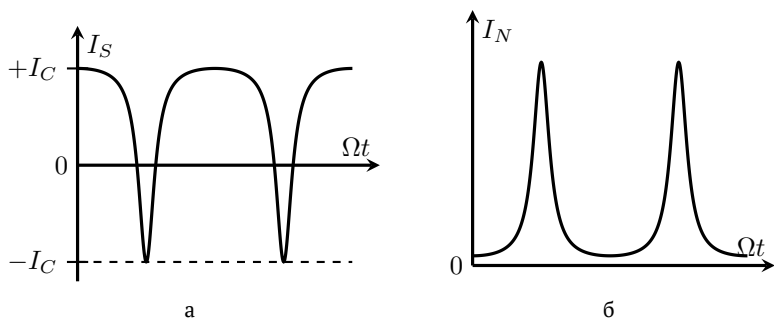


Рис. 23. Компоненты тока (схематично): (а) сверхпроводящая I_S и (б) нормальная I_N компоненты тока через джозефсоновский переход без емкости в резистивном состоянии, когда ток смещения $I \gtrsim I_c$.

компонент тока: $I = \bar{I}_S + \bar{I}_N$. В случае, когда джозефсоновский переход имеет собственную емкость, часть переменной составляющей сверхпроводящей компоненты тока замыкается через емкость, что оказывает влияние на форму осциллирующих компонент тока.

2.3 Резистивная модель

В общем случае ток через джозефсоновский переход, как описано выше, представляет собой сумму трех основных компонент (без учета флуктуационной компоненты тока): сверхпроводящей компоненты I_S , нормальной компоненты I_N и емкостной компоненты I_D , как показано на рис. 24:

$$I = I_S + I_N + I_D. \quad (148)$$

Наиболее простой для описания всех компонент тока и динамических процессов в джозефсоновском переходе является так называемая резистивная модель, которая может быть успешно применена для описания большинства типов джозефсоновских переходов.

Резистивная модель [10; 11] джозефсоновского перехода предполагает (i) синусоидальную зависимость (83) сверхпроводящей компоненты тока I_s от джозефсоновской фазы φ и (ii) линейную связь между нормальной ком-

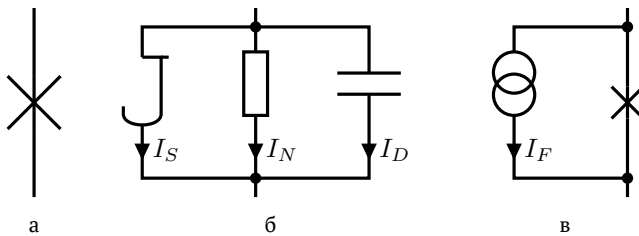


Рис. 24. Резистивная модель джозефсоновского перехода: (а) условное обозначение джозефсоновского перехода, (б) основные компоненты тока через джозефсоновский переход и (в) описание флуктуационной компоненты тока по методу Ланжевена — подключение источника флуктуационного тока параллельно джозефсоновскому переходу.

понентой тока $I_N(t)$ и напряжением $V(t)$ в полном соответствии с законом Ома:

$$V(t) = I_N(t) \cdot R_N, \tag{149}$$

где R_N — нормальное сопротивление. В англоязычной литературе резистивная модель имеет название Resistively Shunted Junction (RSJ) model, так как такая модель описывает, в том числе, туннельные джозефсоновские переходы, шунтированные резистором.

Следует отметить также, что в научной литературе существуют два подхода: емкость джозефсоновского перехода и, соответственно, емкостная компонента тока (i) включаются автоматически в понятие «резистивная модель», или (ii) не включаются, и тогда резистивная модель, к которой добавлена емкость, называется резистивной моделью с емкостью (Resistively and Capacitively Shunted Junction (RCSJ) model).

Учет флуктуаций может быть проведен методом Ланжевена путем включения параллельно джозефсоновскому переходу источника флуктуационного тока I_F , как показано на рис. 24в, со спектральной плотностью описываемых шумов. Это соответствует добавлению такой флуктуационной компоненты тока в правую часть выражения (148). В случае, когда источником флуктуаций является диссипативный элемент, для нахождения спектральной плотности токовой компоненты I_F можно использовать флуктуационно-диссипативную теорему Каллена — Вельтона, согласно ко-

торой спектральная плотность флуктуационного тока через диссипативный элемент описывается выражением (при использовании в спектре как положительных, так и отрицательных значений круговой частоты Ω):

$$S_I(\Omega) = \pi^{-1} \Re [Y(\Omega)] \cdot E(\Omega, T), \quad (150)$$

где $E(\Omega, T)$ – средняя энергия квантового осциллятора с частотой Ω при температуре T :

$$E(\Omega, T) = \frac{\hbar\Omega}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{\hbar\Omega}{2kT} \right) = \frac{\hbar\Omega}{2} + \frac{\hbar\Omega}{\exp(\hbar\Omega/kT) - 1}, \quad (151)$$

а $Y(\Omega) = Z^{-1}(\Omega)$ – адмиттанс (комплексная проводимость) этого элемента. При омической аппроксимации диссипативного элемента

$$\Re [Y(\Omega)] = G_N = R_N^{-1} \quad (152)$$

формулы (150) и (151) описывают плавный переход от формулы Найквиста на низких частотах ($\hbar\Omega \lesssim kT$):

$$S_I(\Omega) = \pi^{-1} \frac{kT}{R_N} \quad (153)$$

к чисто квантовому шуму на высоких частотах ($\hbar\Omega \gg kT$):

$$S_I(\Omega) = \frac{\hbar\Omega}{2\pi R_N}. \quad (154)$$

Для описания общих свойств джозефсоновских переходов целесообразно использовать нормированные параметры и физические величины, когда ток нормируется на величину критического тока: $i = I/I_c$, напряжение нормируется на характерное напряжение: $v = V/V_c$, где $V_c = I_c R_N$, частота Ω нормируется на характерную частоту: $\omega = \Omega/\Omega_c$, где $\Omega_c = (2e/\hbar) \cdot V_c$, а время нормируется на характерную величину времени $t_c = 1/\Omega_c$. Нормированная величина емкости C представляет собой параметр Маккамбера:

$$\beta = \frac{2e}{\hbar} I_c R_N^2 C \equiv \frac{2\pi}{\Phi_0} I_c R_N^2 C. \quad (155)$$

Нормированная величина спектральной плотности флуктуаций $S_I(\Omega)$ определяется соответственно выражением:

$$s_i(\omega) = \frac{S_I(\Omega)}{I_c^2 t_c} = S_I(\Omega) \cdot \frac{2\pi R_N}{I_c \Phi_0}. \quad (156)$$

Таким образом, ток (148) через джозефсоновский переход без учета флуктуационной компоненты в нормированных величинах в рамках общей резистивной модели (с емкостью) определяется следующим выражением:

$$\beta \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} + \sin \varphi = i, \quad (157)$$

где точками обозначено дифференцирование по нормированному времени t .

В случае, когда через джозефсоновский переход протекает постоянный ток $|i| < 1$, уравнение (157) имеет устойчивое решение: $\dot{\varphi} = 0$, $\sin(\varphi) = i$, соответствующее сверхпроводящему состоянию перехода. При задании постоянного тока $|i| > 1$ возможно только резистивное состояние при $\dot{\varphi} \neq 0$. В отсутствие емкости ($\beta = 0$) решение уравнения (157) может быть получено аналитически. Действительно, разделяя переменные, приходим к интегральному выражению

$$\int \frac{d\varphi}{i - \sin \varphi} = \int dt, \quad (158)$$

вычисление которого при $|i| < 1$ дает процесс установления сверхпроводящего состояния $\sin(\varphi) = i$, а при $|i| > 1$ — процесс джозефсоновской генерации. В последнем случае вычисление интеграла (158) приводит к следующему выражению:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{i^2 - 1}} \right) \arctg \left\{ \left[\frac{i - 1}{\sqrt{i^2 - 1}} \right] \operatorname{tg} \left[\frac{\varphi + \pi/2}{2} \right] \right\} = t - t_0, \quad (159)$$

из которого получаем искомое решение для фазы

$$\varphi(\tau) = 2 \arctg \left\{ \left[\frac{\sqrt{i^2 - 1}}{i - 1} \right] \operatorname{tg} \left[0,5 \sqrt{i^2 - 1} (t - t_0) \right] \right\} - \frac{\pi}{2}, \quad (160)$$

где t_0 — произвольная константа, имеющая смысл момента времени, при котором $\varphi = -\pi/2 + 2\pi n$, в силу чего можно считать, что $t_0 = 0$. Далее получаем выражение для производной фазы и, следовательно, напряжения:

$$\frac{V}{V_c} \equiv v = \dot{\varphi} = \frac{i^2 - 1}{[i - \cos(t\sqrt{i^2 - 1})]}. \quad (161)$$

Полученное выражение показывает, что изменение фазы на 2π происходит за период времени $T = 2\pi/\sqrt{i^2 - 1}$. Поэтому средняя скорость изменения фазы (круговая частота джозефсоновской генерации), равная среднему значению нормированной величины напряжения (нормированной постоянной составляющей напряжения), изменяется по гиперболическому закону:

$$\bar{\varphi} \equiv \bar{v} = \sqrt{i^2 - 1}, \quad (162)$$

приближаясь с увеличением тока к асимптоте $\bar{v} = i$. При этом напряжение на джозефсоновском переходе (161) может быть записано в следующем виде:

$$v(t) = \frac{\bar{v}^2}{[i - \cos(\bar{v}t)]}. \quad (163)$$

Таким образом, ВАХ джозефсоновского перехода $\bar{v}(i)$ представляет собой в отсутствие емкости сверхпроводящий участок ($\bar{v} = 0$, $|i| < 1$), соединяющий два гиперболических резистивных участка (162).

Вольт-амперная характеристика (ВАХ) джозефсоновского перехода с пренебрежимо малой емкостью ($\beta = 0$) показана на рис. 25. По мере увеличения тока i форма осцилляций напряжения (показанная схематически сбоку на этом рисунке для точек А и В на ВАХ) приближается к синусоидальному виду, а нарастание джозефсоновской фазы — к линейному закону.

Асимптота $\bar{v} = i$ описывает величину постоянного тока, которую переносит нормальная компонента тока через джозефсоновский переход, а разность между ВАХ и асимптотой описывает величину постоянного тока, которую переносит сверхпроводящая компонента тока через джозефсоновский переход. Эта величина, переносимая сверхпроводящей компонентой тока, уменьшается с ростом тока i и, соответственно, напряжения \bar{v} , то есть

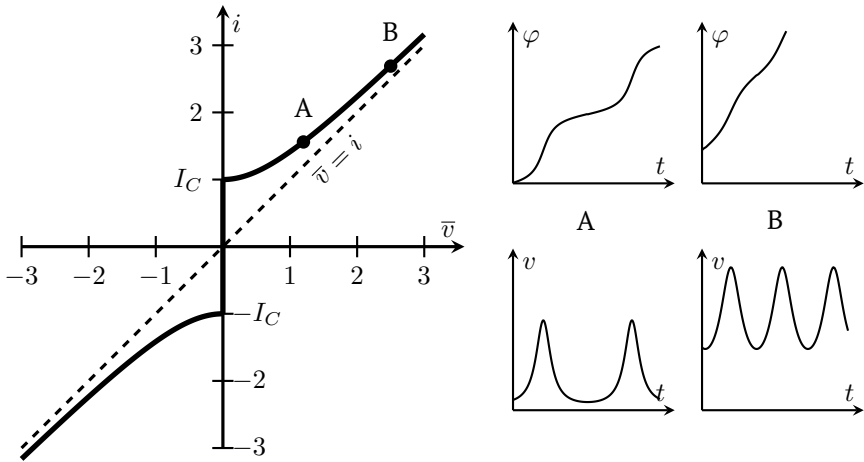


Рис. 25. ВАХ джозефсоновского перехода в рамках резистивной модели с пренебрежимо малой емкостью, а также форма осцилляций напряжения и роста джозефсоновской фазы (схематически) в двух точках ВАХ (А и В).

одновременно с приближением формы джозефсоновской генерации к синусоидальной.

Используя полученную формулу (163), можно выполнить разложение напряжения $v(t)$ на джозефсоновском переходе, находящемся в резистивном состоянии, в ряд Фурье:

$$v(t) = \bar{v} + \sum_{k>0} v_k \cos(k\bar{v}t), \quad (164)$$

в котором амплитуды гармоник джозефсоновской генерации v_k даются следующим выражением:

$$v_k = \frac{2\bar{v}}{(i + \bar{v})^{|k|}}. \quad (165)$$

На рис. 26 показана зависимость амплитуд гармоник джозефсоновской генерации от частоты (т.е. от постоянной составляющей напряжения \bar{v}). При низких частотах, в начале резистивной ветви ВАХ, спектр джозефсоновской генерации богат гармониками из-за импульсного характера изменения на-

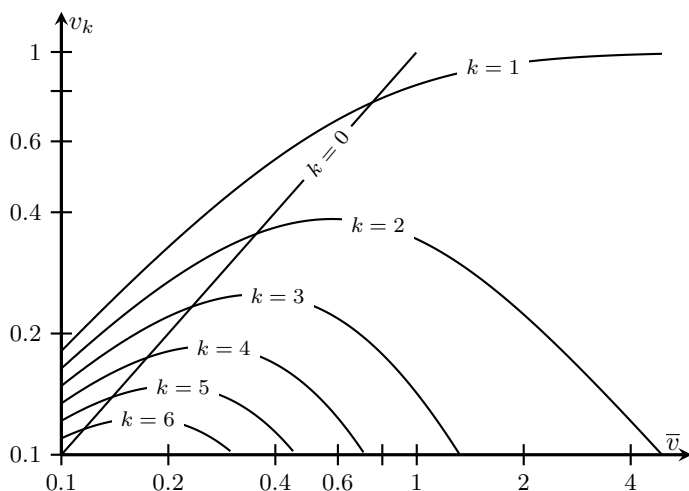


Рис. 26. Зависимость амплитуд гармонических составляющих осцилляций напряжения от частоты джозефсоновской генерации (величины постоянной составляющей напряжения \bar{v}).

пряжения. По мере увеличения частоты джозефсоновской генерации амплитуды гармоник уменьшаются, в спектре остается только основной тон, и форма осцилляций становится синусоидальной. При этом размах осцилляций напряжения в отсутствие емкости остается всегда равным 2 (т.е. $2V_C$ в размерных единицах).

При конечной, но малой (меньше 1) величине емкостного параметра Маккамбера β резистивная ветвь ВАХ сильнее прижимается к асимптоте, с ростом β , а при $\beta > 1$ возникает гистерезис, увеличивающийся с увеличением этого параметра: скачкообразное переключение на резистивную ветвь при токе, равном критическому, и переключение обратно в сверхпроводящее состояние при токе возврата $|I_R| < I_c$, который уменьшается с увеличением β , как показано на рис. 27. В области гистерезиса (в области значений тока от I_c до тока возврата на сверхпроводящую ветвь I_R) возможны два устойчивых состояния: сверхпроводящее ($\bar{v} = 0$) и резистивное ($\bar{v} \neq 0$).

Емкость джозефсоновского перехода оказывает шунтирующее влияние как на гармоники (в первую очередь), так и на основной тон джозефсоновской генерации, поэтому форма осцилляций напряжения быстро прибли-

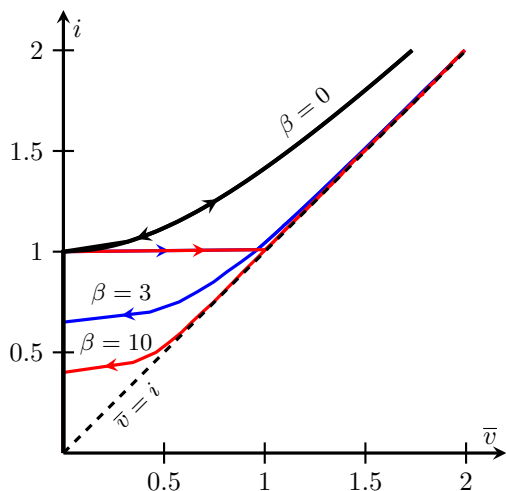


Рис. 27. ВАХ джозефсоновского перехода в резистивной модели с емкостью при значениях параметра Маккамбера $\beta = 0; 3; 10$.

жается к синусоидальной, амплитуда осцилляций также уменьшается с ростом частоты генерации.

Присутствие флуктуационной компоненты тока приводит к появлению размытия границы между сверхпроводящим участком ВАХ и резистивными ветвями ВАХ джозефсоновского перехода (см. рис. 28). Степень влияния тепловых флуктуаций на динамические процессы и ВАХ джозефсоновского перехода зависит от величины шум-фактора [7–9]:

$$\gamma = \frac{k_B T}{E_c} = \frac{2ek_B T}{\hbar I_c} = \frac{I_T}{I_c}, \quad (166)$$

где $I_T = \frac{2ek_B T}{\hbar}$ — эффективный размах тока тепловых флуктуаций, величина которого зависит от температуры:

$$I_T [\text{мкА}] = 0,042 \cdot T [\text{К}]. \quad (167)$$

Для $T = 4,2 \text{ К}$ получаем следующую величину: $I_T \simeq 0,17 \text{ мкА}$.

На достаточно низких частотах в джозефсоновских переходах могут быть также шумы типа $1/f$. Однако верхняя граница таких шумов в джозеф-

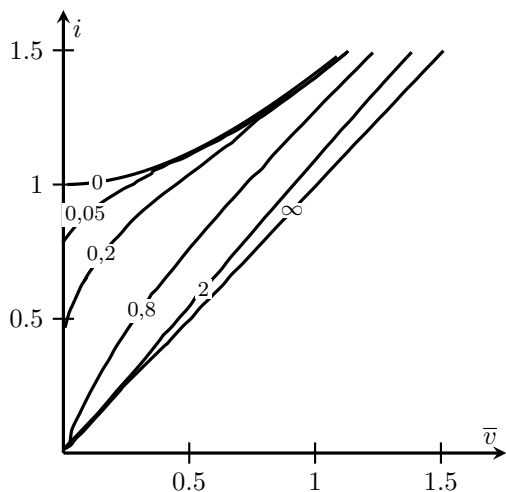


Рис. 28. ВАХ джозефсоновского перехода в резистивной модели с пренебрежимо малой емкостью ($\beta = 0$) в присутствии тепловых флуктуаций, уровень которых соответствует разным значениям величины γ , где $\gamma = k_B T / E_c$ — шум-фактор. По данным из [8; 9].

соновских переходах относительно низка — от единиц герц до сотен килогерц, поэтому их интегральное воздействие во всех известных случаях мало [8; 9].

2.4 ВАХ туннельных джозефсоновских переходов

Туннельные джозефсоновские переходы обладают всегда большой емкостью. Это обуславливает существование на ВАХ глубокого гистерезиса до тока возврата I_R , близкого к нулю. Кроме того, вследствие сильного шунтирующего действия большой емкости, замыкающей через себя почти весь переменный ток, нормальная компонента тока через такой переход переносит практически только постоянную составляющую тока. При этом сверхпроводящая компонента тока осциллирует по синусоидальному закону, и ее среднее значение равно нулю (не участвует в переносе постоянного тока).

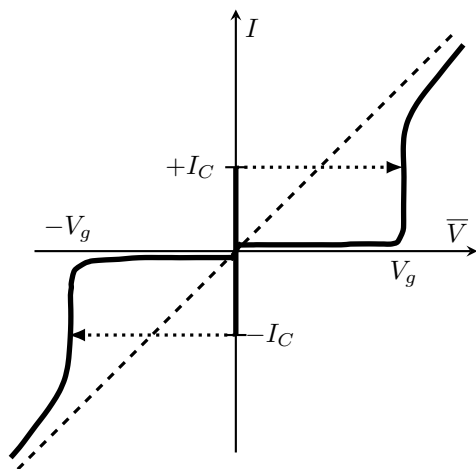


Рис. 29. ВАХ туннельного джозефсоновского перехода.

Поэтому резистивная ветвь ВАХ туннельного джозефсоновского тока является фактически квазичастичной ВАХ, показанной на рис. 17. Однако при движении по этой ветви ВАХ в обратном направлении (в сторону уменьшения тока) устойчивые состояния на этой ветви будут наблюдаться только до точки, соответствующей току возврата I_R ; в этой точке будет происходить скачок на сверхпроводящий участок ВАХ. В качестве примера типичной ВАХ туннельного джозефсоновского перехода на рис. 29 показана схематически теоретическая ВАХ туннельного джозефсоновского перехода.

Для описания туннельного джозефсоновского перехода может быть использована так называемая нелинейно-резистивная модель (англ.: RSJN-Model), отличающаяся от стандартной резистивной модели тем, что сопротивление в омической связи нормальной компоненты тока и напряжения задается в виде кусочно-линейной функции [12]:

$$I_N(V) = \begin{cases} V/R_g, & \text{при } |V| < V_g, \\ V/R_N, & \text{при } |V| > V_g, \end{cases} \quad (168)$$

где $V_g = (\Delta_1 + \Delta_2)/e$ — «щелевое» напряжение, R_N — нормальное сопротивление, R_g — «дощелевое» сопротивление. Обычно в переходах с хоро-

шим качеством туннельного изолирующего слоя величина $R_g/R_N \gtrsim 20$ при $T \sim T_c/2$.

Нелинейно-резистивная модель позволяет настолько улучшить точность описания реальных туннельных переходов, что для значительного числа задач отклонения составляют лишь единицы процентов. Поэтому она достаточно широко применяется, например, в ряде программ автоматического расчета схем на таких переходах.

Теоретическое описание на основе микроскопической теории (туннельная модель, *англ.*: TJM-Model – Tunnel Junction Microscopic Model) резистивного состояния, представляющего собой нестационарный процесс, в котором присутствуют и зависят друг от друга туннельные акты “сверхпроводящих” электронов (ток I_S) и нормальных носителей заряда (ток I_N), приводит к сложным выражениям для этих компонент тока в виде интегральных сверток [8; 9]:

$$I_S(t) = \int_{-\infty}^t I_p(t-t') \cdot \sin \left[\frac{(\varphi(t) + \varphi(t'))}{2} \right] dt', \quad (169)$$

$$I_N(t) = \int_{-\infty}^t I_q(t-t') \cdot \sin \left[\frac{(\varphi(t) - \varphi(t'))}{2} \right] dt', \quad (170)$$

где ядра $I_{p,q}(\tau)$ имеют достаточно сложный вид; наиболее простые выражения для этих ядер получаются при $k_B T \ll T_c$, $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ [8; 9]:

$$I_p(\tau) = \frac{2\pi^2 \Delta^2}{e\hbar R_N} J_0 \left(\frac{\tau}{\tau_g} \right) Y_0 \left(\frac{\tau}{\tau_g} \right), \quad (171)$$

$$I_q(\tau) = \frac{2\pi^2 \Delta^2}{e\hbar R_N} J_1 \left(\frac{\tau}{\tau_g} \right) Y_1 \left(\frac{\tau}{\tau_g} \right) - \frac{\hbar}{eR_N} \delta'(\tau), \quad (172)$$

где $J_0(z)$, $J_1(z)$ и $Y_0(z)$, $Y_1(z)$ – функции Бесселя соответственно первого и второго рода, $\tau_g = 2\omega_g^{-1} = \hbar/\Delta(0)$.

Хотя туннельная модель дает почти точное описание динамики туннельных переходов, сложность этой модели сильно ограничивает ее практическое применение. Тем не менее, такая модель, наряду с другими моделями

джозефсоновских элементов, используется в программном пакете PSCAN (*Personal Superconductor Circuit Analyzer*) [13–15] для описания туннельных джозефсоновских переходов. Для упрощения и ускорения численных расчетов в данном программном пакете ядра (171) и (172) заменены на использование заданных табулированных значений функции [16], максимально адекватно аппроксимирующей эти ядра.

2.4.1 Резистивное шунтирование

Для создания большинства аналоговых и цифровых устройств сверхпроводниковой электроники требуется, чтобы используемые в них джозефсоновские переходы имели безгистерезисную вольт-амперную характеристику (ВАХ). Для получения такой ВАХ у туннельных джозефсоновских переходов применяется резистивное шунтирование туннельных джозефсоновских переходов относительно низкоомным резистором R_s (обычно $R_s \sim R_T$), где R_T является нормальным сопротивлением туннельного перехода. В этом случае нормальная компонента тока протекает через шунтирующее сопротивление, следовательно, такой джозефсоновский переход может быть описан в рамках *резистивной модели с нормальным сопротивлением* $R_N = R_s$ в области напряжений $|V| < V_g$, достаточной для всех практических устройств. Величина шунтирующего резистора задается такой, чтобы уменьшить эффективное значение параметра Маккамбера:

$$\beta_{\text{eff}} = \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \right) I_c R_s^2 C \quad (173)$$

до требуемой величины, не превышающей 1. В области напряжений $|V| > V_g$ эффективное значение нормального сопротивления шунтированного перехода несколько уменьшается и становится равным сопротивлению параллельно включенных резисторов R_s и R_T .

2.5 Джозефсоновские переходы на основе высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП)

В настоящее время наиболее часто используемым высокотемпературным сверхпроводником (ВТСП) является материал $Y_1Ba_2Cu_3O_{7-\delta}$, относящийся к классу керамик. Критическая температура данного сверхпроводника $T_c \approx 95$ К. Наилучшие сверхпроводящие свойства такой материал имеет в состоянии единого монокристалла (см. кристаллическую структуру на рис. 30). Поэтому в сверхпроводниковой электронике используются монокристаллические ВТСП пленки (в основном $Y_1Ba_2Cu_3O_{7-\delta}$), сформированные на монокристаллической подложке, причем таким образом, чтобы кристаллическая плоскость a - b (плоскость расположения в монокристалле Cu-O элементов), в которой наблюдаются наилучшие сверхпроводящие свойства, была параллельна плоскости подложки.

Основная принципиальная особенность материалов высокотемпературных сверхпроводников заключается в очень малой длине когерентности ξ . Так например, в случае сверхпроводника $Y_1Ba_2Cu_3O_{7-\delta}$, длина когерентности $\xi \approx 7$ нм в плоскости a - b и $\xi \approx 1,5$ нм (несколько межатомных расстояний в кристалле) в перпендикулярном направлении (ось c). В то же время, для ниобия (основного низкотемпературного сверхпроводника) длина когерентности составляет $\xi \approx 40$ нм. Поэтому все способы, которые могут использоваться для формирования джозефсоновских переходов разного типа на основе традиционных низкотемператур-

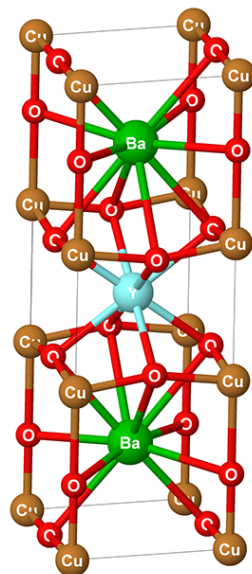


Рис. 30. Кристаллографическая структура сверхпроводника $Y_1Ba_2Cu_3O_{7-\delta}$. Параметры решетки приведены по [17].

ных сверхпроводников, не позволяют создавать приемлемые джозефсоновские структуры на основе ВТСП, так как формируемая в таких структурах слабая связь между двумя сверхпроводниками всегда оказывается слишком слабой, практически отсутствующей, из-за слишком малой длины когерентности, при которой волновые функции конденсатов куперовских пар сверхпроводников быстро ослабевают в области любой такой слабой связи и не могут взаимодействовать друг с другом.

Тем не менее, было обнаружено, что би-кристаллическая граница — граница между двумя частями монокристаллической пленки, в которых кристаллографические оси развернуты по отношению друг к другу на некоторый угол (в пределах $\sim 10 \dots 45^\circ$), дает как раз такую слабую электрическую связь между частями пленки, которая приводит к эффекту Джозефсона. Это свойство би-кристаллической границы лежит в основе всех конструкций ВТСП джозефсоновских переходов, которые в настоящее время используются. Примеры возможной разориентации кристаллографических осей в двух частях пленки показаны на рис. 31.

На рис. 32 схематически показана технология, лежащая в основе создания так называемых би-кристаллических джозефсоновских переходов. Сначала изготавливается би-кристаллическая подложка из двух плотно смыкающихся половинок с разными направлениями кристаллографических осей, затем на этой подложке формируется би-кристаллическая ВТСП пленка, в каждой части которой направления кристаллографических осей повторяют направления кристаллографических осей в каждой из половинок подложки. Затем, удаляя ненужные области би-кристаллической пленки, формируется требуемая топология устройства, которая содержит полосы пленки, пересекающие би-кристаллическую границу, на которой формируется джозефсоновский переход. Величина критического тока такого перехода регулируется шириной полосы.

Другой тип ВТСП джозефсоновских переходов — это так называемые переходы на ступеньке (step-edge junctions). В этой технологии сперва создаются ступеньки на поверхности монокристаллической подложки в тех местах, где должны быть джозефсоновские переходы, а затем на этой подложке формируется монокристаллическая ВТСП пленка. Потом ненужные

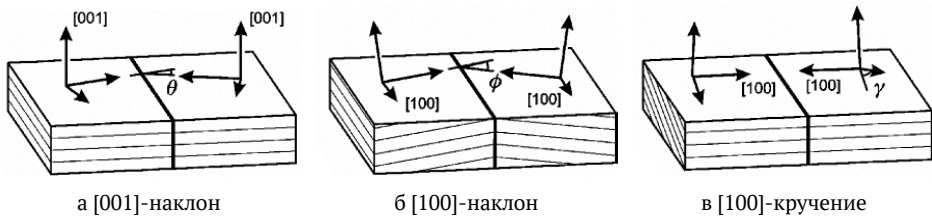


Рис. 31. Примеры разориентации (поворот вокруг направлений c , a , b) кристаллографических осей в двух частях пленки по разные стороны от би-кристаллической границы, на которой возникает эффект Джозефсона (из работы [18]).

Опубликовано с разрешения American Physical Society. Лицензия: RNP/26/APR/104519. Reprinted figure with permission from [H. Hilgenkamp and J. Mannhart, Grain boundaries in high-Tc superconductors, Reviews of Modern Physics, vol. 74, no. 2, pp. 485–549, 2002]. Copyright 2002 by the American Physical Society.

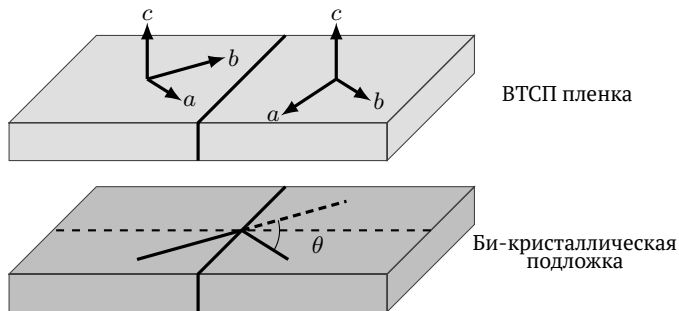


Рис. 32. Иллюстрация технологии создания би-кристаллических пленок ВТСП. Снизу показан вариант би-кристаллической подложки, состоящей из двух плотно смыкающихся половинок, у которых оси кристаллических структур развернуты по отношению друг к другу на некоторый угол θ . Сверху показана би-кристаллическая пленка ВТСП, формируемая на данной подложке. Направление кристаллографических осей в разных частях ВТСП пленки повторяет направление кристаллографических осей в соответствующих половинках подложек.

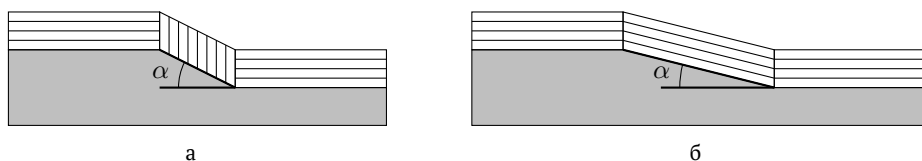


Рис. 33. Джозефсоновские ВТСП переходы на ступеньке в монокристаллической подложке: общий вид и направление плоскостей a - b на склоне ступеньки в зависимости от угла α этого склона: (а) большой угол и (б) малый угол. Джозефсоновская связь между участками пленки образуется в двух местах: в начале и в конце склона ступеньки.

места ВТСП пленки удаляются, чтобы получить требуемую топологию создаваемого устройства с джозефсоновскими переходами на ступеньках, когда полосы ВТСП пленки пересекают созданные в подложке ступеньки. На рис. 33 схематически показана структура ВТСП пленки, пересекающей ступеньку, и направления плоскости a - b в монокристаллических участках пленки: до ступеньки, на склоне ступеньки и после ступеньки. Джозефсоновская связь между участками пленки образуется в двух местах: в начале и в конце склона ступеньки; на склоне ступеньки направление плоскости a - b монокристаллической структуры зависит от угла наклона α .

Кроме перечисленных подходов формирования ВТСП джозефсоновских структур с использованием джозефсоновской связи на би-кристаллической границе участков монокристаллической пленки, был предложен также способ создания слабой джозефсоновской связи в полоске монокристаллической пленки путем воздействия на нее сфокусированным пучком ионов гелия (FIB — Focused Ion Beam), который в заданном месте пересекает полосу пленки (с нужной скоростью) и создает узкую область дефектов в кристаллической структуре. При правильно заданной дозе облучения эта область работает как слабая электрическая связь между частями полоски, что приводит к возникновению эффекта Джозефсона. Критический ток такого джозефсоновского перехода зависит не только от ширины и толщины полоски, но и от дозы ионного облучения, влияющей также на вид ВАХ перехода. К сожалению, существенным недостатком такой технологии, как и перечисленных выше, является большой технологический разброс параметров джо-

зефсоновских переходов (в первую очередь, критических токов), измеряемый десятками процентов.

2.6 Джозефсоновские пи-переходы

В сверхпроводящем состоянии, в *отсутствие тока* через стандартный джозефсоновский переход в автономном состоянии, джозефсоновская фаза принимает значение $\varphi = 0$ (с точностью до π); значения фазы $\varphi = (2n + 1)\pi$ являются неустойчивыми. Однако, возможны такие джозефсоновские переходы, у которых, наоборот, значения джозефсоновской фазы $\varphi = (2n + 1)\pi$ соответствуют устойчивому состоянию, а значения фазы $\varphi = 2\pi n$ соответствует неустойчивому состоянию. Такие джозефсоновские переходы получили название джозефсоновских пи-переходов. Сверхпроводящая компонента тока в таком переходе может быть записана в виде

$$I_s = I_c \sin(\varphi - \pi). \quad (174)$$

Джозефсоновские пи-переходы могут быть получены с использованием структур типа сэндвич с прослойкой из слабого ферромагнетика, т.е. SFS сэндвичей, а также с использованием ВТСП сверхпроводников.

2.6.1 Джозефсоновские SFS переходы

На SF границе (сверхпроводник — ферромагнетик), так же, как и на SN границе, наблюдается эффект близости, заключающийся, в том числе, в возникновении под влиянием сверхпроводника в пограничной области ферромагнетика наведенной сверхпроводимости (иногда говорят о «диффузии» куперовских пар электронов в пограничную область этого материала). В нормальном металле параметр порядка экспоненциально убывает с увеличением расстояния x от границы. В ферромагнетике экспоненциальное убывание сопровождается осцилляциями параметра порядка, как показано на рис. 34. Это означает что фаза волновой функции периодически изменяется на π , что происходит под воздействием обменного поля в ферромагнетике [2]. Обменное взаимодействие направлено на выстраивание

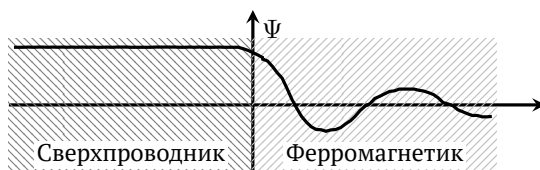


Рис. 34. Волновая функция (параметр порядка) на границе сверхпроводник — ферромагнетик (SF).

спинов электронов в одном направлении, т. е. на разрушение куперовской пары электронов с противоположными спинами. В случае больших значений средней обменной энергии E_{ex} в ферромагнетике это взаимодействие будет приводить к сильному подавлению наведенной сверхпроводимости, т.е. к стремительному затуханию параметра порядка. Однако в относительно слабом ферромагнетике могут наблюдаться осцилляции параметра порядка, которые затухают экспоненциально $\sim \exp(-x/\xi_F)$, но относительно медленно, с характерным значением ξ_F длины когерентности, близкой к типичной величине длины когерентности в нормальном металле [2], т.е. практически достаточной для создания SFS джозефсоновского перехода типа сэндвич. Из рис. 34 видно, что в случае, когда толщина ферромагнитной прослойки d_F приближается к небольшому целому числу периодов осцилляции параметра порядка в ферромагнетике, фазы волновых функций в сверхпроводящих электродах в отсутствие тока через такой сэндвич должны принять одинаковое значение (джозефсоновская фаза $\varphi = 0$), как в стандартном джозефсоновском переходе. Однако, если толщина d_F окажется близкой к небольшому нечетному числу полупериодов осцилляции параметра порядка, фазы волновых функций в электродах будут отличаться на π , что соответствует значению джозефсоновской фазы в отсутствие тока $\varphi = \pi$. В этом случае SFS сэндвич будет представлять собой джозефсоновский пи-переход. Анализ условий минимума свободной энергии такого сэндвича также подтверждает эти выводы (см. [2]).

Экспериментальное подтверждение того, что изготовленный джозефсоновский переход является пи-переходом, может быть получено при включении этого перехода в один из сверхпроводящих квантовых интерферо-

метров, описание которых следует ниже. Присутствие в интерферометре пи-перехода эквивалентно приложению к этому интерферометру магнитного потока, равного половине кванта магнитного потока Φ_0 .

2.6.2 Пи-переходы на основе ВТСП

Свойства традиционных низкотемпературных сверхпроводников изотропны, т.е. одинаковы по всем направлениям. Такие сверхпроводники называют S-волновыми (S-wave) сверхпроводниками (терминология заимствована из атомной физики). В отличие от них, ВТСП сверхпроводники ($Y_1Ba_2Cu_3O_{7-\delta}$, $Bi_2Sr_2CaCu_2O_8$ и другие) в монокристаллическом виде обладают сильной анизотропией свойств не только в перпендикулярном и параллельном направлениях по отношению к плоскости $a-b$, но также и в плоскости $a-b$. Параметр порядка в этой плоскости выглядит как четырехлепестковая фигура ($\propto (x^2 - y^2)$), показанная на рис. 35а. Знак параметра порядка (+ или -) меняется на противоположный при переходе от одного лепестка к другому. Такие сверхпроводники называют d -волновыми (d -wave) сверхпроводниками. Это значит, что абсолютная величина и знак параметра порядка зависят от направления сверхпроводящего тока (направления дрейфовой скорости куперовских пар), т.е. от направления вектора k , появляющегося у куперовской пары электронов. Такой результат является следствием анизотропии потенциала взаимодействия электронов $V_{kk'}$ в этих материалах (см. [2; 3]).

Если в ВТСП джозефсоновском переходе, например, в би-кристаллическом переходе, сверхпроводящий ток обеспечивается движением куперовских пар из одного электрода в другой, при котором направление этого движения в электродах соответствует одному и тому же знаку параметра порядка, джозефсоновский переход будет стандартным, с зависимостью сверхпроводящей компоненты тока от джозефсоновской фазы $I_s = I_c \sin(\varphi)$.

В противном случае, когда направление движения куперовских пар электронов в электродах соответствует разным знакам параметра порядка в них (в одном «+», в другом «-»), джозефсоновский переход будет пи-переходом, т.е. переходом, в котором $I_s = I_c \sin(\varphi - \pi)$.

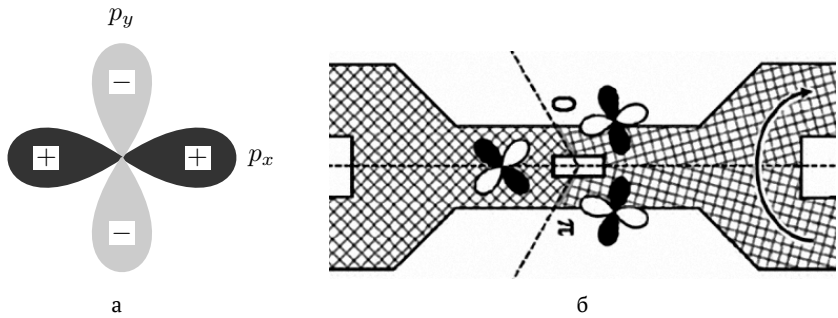


Рис. 35. (а) параметр порядка ВТСП сверхпроводника в плоскости а-б и (б) топология двухконтактного сверхпроводящего квантового интерферометра, у которого один из двух би-кристаллических джозефсоновских переходов является пи-контактом (из работы [19]).

Опубликовано с разрешения American Physical Society. Лицензия: RNP/26/APR/104496.

Reprinted figure with permission from [J. Tomaschko et al., Phase-sensitive evidence for $d_{x^2-y^2}$ -pairing symmetry in the parent-structure high- T_c cuprate superconductor $Sr_{1-x}La_{1-x}CuO_2$, Physical Review B, vol. 86, no. 9, p. 94509, 2012]. Copyright 2012 by the American Physical Society.

На рис. 35б показана топология двухконтактного сверхпроводящего квантового интерферометра, у которого один из двух би-кристаллических джозефсоновских переходов является пи-контактом. Такой интерферометр создан путем формирования би-кристаллической пленочной ВТСП структуры на би-кристаллической подложке с непрямолинейной границей (из двух отрезков линий) между ее частями, как показано на этом рисунке. Экспериментальным подтверждением того, что один из джозефсоновских переходов является пи-переходом, служит сдвиг на $\Phi_0/2$ зависимости всех характеристик такого интерферометра от приложенного внешнего магнитного потока Φ_e по сравнению с зависимостями для интерферометра с одинаковым типом джозефсоновских переходов [2; 3].

2.7 Воздействие внешнего гармонического сигнала

Внешний высокочастотный электромагнитный сигнал, воздействующий на джозефсоновский переход, приводит к возникновению через него высокочастотного тока, влияющего на процесс джозефсоновской генерации. Даже слабый внешний сигнал с частотой $\Omega \approx \Omega_J$ может вызывать синхронизацию (захват частоты) джозефсоновских осцилляций. Это явление, стандартное для автоколебательных систем, здесь приобретает особое значение, поскольку сопровождается появлением на ВАХ переходов вертикального участка – *джозефсоновской ступеньки тока* – при напряжении $V = \pm \hbar \Omega / (2e)$. Это явление, предсказанное еще Джозефсоном [6] в его основной работе, впервые экспериментально наблюдалось С. Шапиро [20] и с тех пор является одним из *основных признаков эффекта Джозефсона*.

2.7.1 Ступеньки Шапиро на ВАХ

В рамках резистивной модели уравнение джозефсоновского перехода, смещенного источником постоянного тока i и источником высокочастотного тока \tilde{i} , приобретает следующий вид

$$\beta \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} + \sin(\varphi) = i + \tilde{i}, \quad (175)$$

где

$$\tilde{i} = b \cdot \sin(\omega t) \quad (176)$$

— высокочастотный гармонический ток. В отсутствие емкости (когда параметр Маккамбера $\beta = 0$) это нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка упрощается до нелинейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\dot{\varphi} + \sin \varphi = i + \tilde{i}. \quad (177)$$

Однако, несмотря на такое упрощение, в общем случае решение этого уравнения требует применения методов численного моделирования.

Аналитическое рассмотрение возможно только в так называемом высокочастотном пределе [7–9], когда $\omega \gg 1$ или $\beta\omega^2 \gg 1$. В автономном режиме, когда задан только постоянный ток i , форма осцилляций сверхпроводящей и нормальной компонент тока в высокочастотном пределе очень близка к синусоидальной, и весь постоянный ток i переносится постоянной составляющей нормальной компоненты тока: $\bar{\varphi} \equiv \bar{v} = i$, а джозефсоновская фаза изменяется по линейному закону: $\varphi = \bar{v}t$. Присутствие, помимо постоянного тока i через джозефсоновский переход, также переменного тока (176) обуславливает появление осциллирующей составляющей джозефсоновской фазы:

$$\varphi = \bar{v}t + x \cdot \sin(\omega t) + \chi, \quad (178)$$

где χ — некоторая постоянная величина, задающая значение джозефсоновской фазы при $t = 0$, т.е. в момент, когда переменная составляющая проходит свое нулевое значение. Далее необходимо учесть, что выражение для сверхпроводящей компоненты тока может быть разложено в ряд Фурье по известной формуле:

$$\sin(\bar{v}t + \chi + x \sin \omega t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(x) \sin(\bar{v}t + \chi + n\omega t), \quad (179)$$

где $J_n(z)$ — функции Бесселя первого рода n -го порядка. Из этой формулы следует, что в силу нелинейных свойств джозефсоновского перехода, в спектре сверхпроводящей компоненты тока (и, следовательно, в нормальной компоненте тока) появляются сначала комбинационные компоненты с частотами $\bar{v} + n\omega$, а при захвате частоты, когда $\bar{v} = -n\omega$ (отрицательные частоты тождественны положительным), комбинационные компоненты становятся гармониками, и появляется постоянная составляющая $\Delta i = J_{-n}(x) \cdot \sin(\chi)$. Эта дополнительная величина постоянного тока при фиксированном напряжении \bar{v} формирует ступеньку тока на ВАХ:

$$i = \bar{v} + \Delta i_n = \bar{v} + J_{-n}(x) \cdot \sin(\chi). \quad (180)$$

На этой ступеньке изменение величины задаваемого постоянного тока i приводит только к изменению фазового сдвига χ в пределах от $-\pi/2$ до $+\pi/2$, не изменяя при этом постоянную составляющую напряжения \bar{v} , т.е. частоту джозефсоновской генерации. Поскольку $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, размах n -ой ступеньки тока, в пределах которой реализуется синхронный режим джозефсоновской генерации, дается величиной функции Бесселя:

$$\Delta i_n = 2 |J_n(x)|, \quad (181)$$

где x — амплитуда переменной составляющей джозефсоновской фазы (178).

Таким образом, физическая интерпретация полученного результата следующая. Протекание заданного переменного тока через джозефсоновский переход, представляющий собой нелинейный элемент, приводит к появлению гармоник этого воздействия, а затем и комбинационных частот вследствие смещения этих гармоник с джозефсоновской генерацией. Приближение частоты джозефсоновской генерации к частоте одной из гармоник внешнего воздействия (тока \tilde{i}) приводит к возникновению захвата частоты джозефсоновской генерации гармоникой внешнего воздействия; на ВАХ появляется ступенька тока (181), называемая ступенькой Шапиро. В высокочастотном пределе амплитуда x осциллирующей компоненты джозефсоновской фазы связана с амплитудой b заданного высокочастотного тока простой формулой:

$$x = \frac{b}{\left(\omega \sqrt{1 + \omega^2 \beta^2}\right)}. \quad (182)$$

По мере увеличения амплитуды этого тока появляются ступеньки Шапиро с более высокими номерами, а затем осциллируют по законам соответствующих им функций Бесселя. Поэтому при малых амплитудах воздействующего тока размер появляющихся ступенек убывает с их номером, однако при больших амплитудах воздействия такое соотношение величин ступенек на ВАХ может нарушаться: ступени с более высоким номером могут быть больше, чем предыдущие ступени.

В общем случае точный расчет ступеней Шапиро на ВАХ джозефсоновского перехода требует использования методов численного моделирования

(например, с использованием программного пакета PSCAN). Однако, как показывает такое численное моделирование, характер поведения ступенек Шапиро на ВАХ остается очень близким к тому результату, который получен в высокочастотном пределе, т.е. размер ступенек Шапиро описывается функцией Бесселя с номером, соответствующим этой ступеньке, от амплитуды переменной составляющей джоозефсоновской фазы (178). На рис. 36 показаны примеры результатов численного моделирования ВАХ со ступеньками Шапиро с использованием резистивной модели джоозефсоновского перехода с пренебрежимо малой емкостью.

Отдельно следует отметить, что в резистивной модели джоозефсоновского перехода без емкости на его ВАХ могут присутствовать только гармонические ступени Шапиро [7], когда $\bar{v} = n\omega$. Однако отступление от этой модели, например, за счет отклонения от синусоидального закона зависимости $I_s(\varphi)$ или присутствия относительно большой емкости, делает возможным

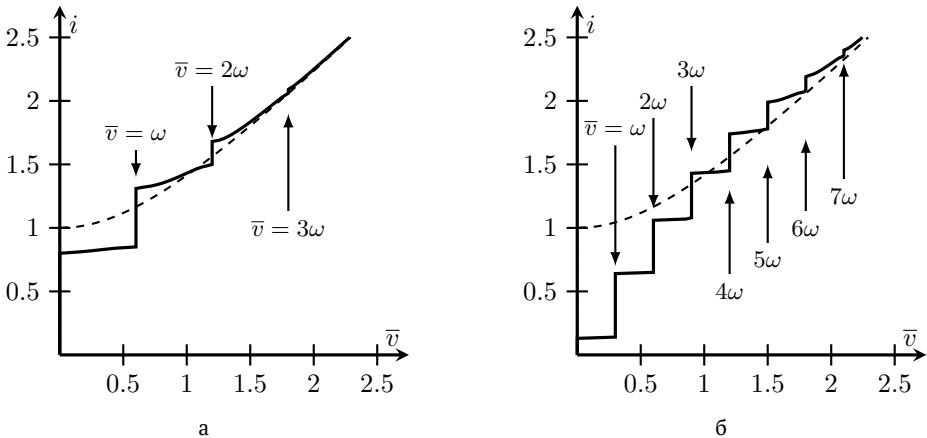


Рис. 36. Образование на ВАХ джоозефсоновского перехода с пренебрежимо малой емкостью ступенек Шапиро при различных амплитудах b (нормированных на критический ток) и частотах ω (нормированных на характерную величину) воздействия (а) $b = 0,6, \omega = 0,6$ и (б) $b = 1,2, \omega = 0,3$. В последнем случае амплитуда переменной компоненты джоозефсоновской фазы значительно больше, что ведет к увеличению числа наблюдаемых ступенек. Пунктирной линией обозначена ВАХ перехода при отсутствии воздействия.

существование субгармонических ступенек на ВАХ, для которых $\bar{v} = m\omega/n$ ($m < n$), и в первую очередь, ступенек $\bar{v} = \omega/n$, когда воздействующий сигнал захватывает частоту n -ой гармоники джозефсоновской генерации. Наблюдать такие ступеньки очень сложно, так как они должны сосредотачиваться в начальной части резистивной ветви ВАХ.

2.7.2 Детекторный отклик

Детекторный отклик — это разность между ВАХ джозефсоновского перехода под воздействием внешнего электромагнитного сигнала и ВАХ автономного перехода:

$$\text{Resp} = I(V)_{\text{signal}} I(V)_0. \quad (183)$$

В случае, когда на джозефсоновский переход воздействует слабый электромагнитный сигнал, создающий через него высокочастотный ток, величина которого сравнима с тепловыми флуктуациями, наблюдается «зародыш» ступеньки, размытый флуктуациями. Расчет дает следующее выражение для отклика на слабый сигнал с частотой ω в области напряжений $\bar{v} \sim \omega$ на ВАХ джозефсоновского перехода:

$$\text{Resp} = 0,5J_1^2(x) \left[\frac{\delta}{(\delta^2 + \gamma^2)} \right], \quad (184)$$

где γ — шум-фактор, $\delta = \bar{v} - \omega$ — частотная расстройка, x — амплитуда переменной составляющей джозефсоновской фазы. Поскольку при малых значениях аргумента функция Бесселя $J_1(x)$ изменяется линейно как $x/2$, для малых сигналов получаем квадратичный отклик, величина которого пропорциональна мощности воздействующего сигнала:

$$\text{Resp} = \frac{1}{8}x^2 \left[\frac{\delta}{(\delta^2 + \gamma^2)} \right]. \quad (185)$$

В случае джозефсоновского перехода с пренебрежимо малой емкостью в высокочастотном приближении $x \simeq b/\omega$, где b — амплитуда высокочастотного тока.

2.8 Распределенный туннельный джозефсоновский переход

Увеличение размеров (длины или ширины) джозефсоновских переходов типа сэндвич, приводит к тому, что значение плотности тока в разных частях структуры становится существенно разным. Такие переходы называются распределенными. Интерес могут представлять только распределенные туннельные переходы, так как в SNS структурах нормальное сопротивление становится предельно малым, обесценивая все свойства такого перехода.

Рассмотрим джозефсоновский переход, представляющий собой две массивные достаточно узкие сверхпроводящие пластинки длиной L (обычно это полоски так называемых «толстых» пленок, толщина которых существенно больше лондоновской глубины проникновения), разделенные тонким слоем диэлектрика, через который устанавливается слабая электрическая связь туннельного типа между сверхпроводящими пластинками, как показано схематически на рис. 37. Если такую систему поместить в относительно слабое внешнее магнитное поле, параллельное плоскости диэлектрического слоя, в ней возникает ток, предназначенный экранировать проникновение магнитного поля внутрь сверхпроводящего пространства, включающего в себя и пространство слабой сверхпроводимости (через диэлектрик). Этот экранирующий ток течет по внешней поверхности сверхпроводников в слое порядка лондоновской глубины проникновения Λ и замыкается через слабую связь между электродами — тонкий слой диэлектрика. Поскольку плотность критического тока в слабой связи очень мала, этот сверхпроводящий ток растекается на значительную ширину вглубь перехода, как схематически показано на рис. 37. Опишем далее эту ситуацию математически.

Пусть ось x направлена вдоль перехода и проходит через середину диэлектрика, а магнитное поле направлено вдоль оси z . Область вдоль оси y , где может протекать ток и существовать магнитное поле, имеет размер d , равный сумме толщины диэлектрика t и удвоенной величины лондонов-

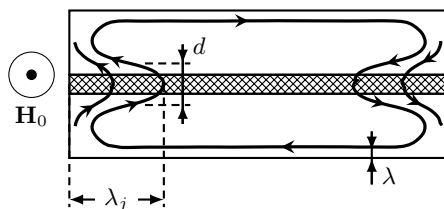


Рис. 37. Распределенный туннельный джозефсоновский переход (сечение), помещенный в магнитное поле H_0 . Показано распределение экранирующего (мейсснеровского) тока. Штрихованная область — диэлектрик, незакрашенная — сверхпроводник.

ской глубины проникновения:

$$d = 2\lambda + t. \quad (186)$$

Рассмотрим две близкие пары точек (1, 3 и 4, 2) на переходе, вблизи диэлектрического слоя. Эти точки должны находиться вне области, занятой магнитным полем (и током), т. е. на таком расстоянии от диэлектрического слоя, которое существенно превышает глубину проникновения λ , а расстояние между парами точек примем равным dx , как показано на рис. 38. Поскольку ток в этой области, где выбраны точки, отсутствует, второе уравнение Гинзбурга — Ландау (99) приводит к выражению

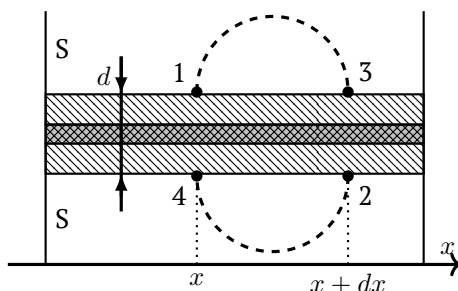


Рис. 38. Участок джозефсоновского перехода (сечение). Перекрестной штриховкой показан диэлектрик толщиной t , однократной штриховкой выделена область, в которой может быть магнитное поле (и ток), толщиной $d = 2\lambda + t$.

$$\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta = \mathbf{A}, \quad (187)$$

где θ — фаза волновой функции, \mathbf{A} — векторный потенциал магнитного поля. Проинтегрируем это уравнение по пунктирным участкам, показанным на рис. 38:

$$\frac{\Phi_0}{2\pi} \left[\int_1^3 \nabla \theta dl + \int_4^2 \nabla \theta dl \right] = \left[\int_1^3 \mathbf{A} dl + \int_4^2 \mathbf{A} dl \right]. \quad (188)$$

Расстояние d будем в дальнейшем считать пренебрежимо малым. Тогда правую часть формулы (188) можно записать приближенно в виде:

$$\oint \mathbf{A} dl = d\Phi, \quad (189)$$

где $d\Phi$ — магнитный поток, охватываемый пунктирным контуром, если этот контур дополнить отрезками 1-4 и 3-2. Теперь очевидно, что после интегрирования левой части в (188) получим

$$\frac{\Phi_0}{2\pi} (\theta_3 - \theta_1 + \theta_2 - \theta_4) = d\Phi. \quad (190)$$

Учитывая, что $\theta_3 - \theta_1 = \varphi(x + dx)$ и $\theta_2 - \theta_4 = \varphi(x)$ представляют из себя джозефсоновские фазы между электродами в точках с координатами $x + dx$ и x , получаем

$$\varphi(x + dx) - \varphi(x) = \frac{2\pi}{\Phi_0} d\Phi, \quad (191)$$

или

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \cdot \frac{d\Phi}{dx}, \quad (192)$$

где $\Phi_0 = h/2e$. Учитывая, что $(1/d) \cdot d\Phi/dx$ — индукция магнитного поля \mathbf{B} в переходе в точке x в направлении оси z , имеем

$$B = \frac{\Phi_0}{2\pi d} \cdot \frac{d\varphi}{dx}. \quad (193)$$

Плотность сверхпроводящего тока через переход в направлении оси y может быть записана, согласно уравнению Максвелла $\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}$, в виде

$$j_s = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dx}. \quad (194)$$

Учитывая далее основное джозефсоновское соотношение между плотностью тока и разностью фаз: $j_s = j_c \sin\varphi$, имеем окончательно так называемое уравнение Феррелла — Прейнджа:

$$\lambda_j^2 \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \sin(\varphi), \quad (195)$$

где λ_j — джозефсоновская глубина проникновения:

$$\lambda_j = \sqrt{\frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0 j_c d}}. \quad (196)$$

Решение уравнения (195) должно описывать распределение джозефсоновской фазы вдоль перехода $\varphi(x)$. Рассмотрим случай очень слабого внешнего поля $H_0 \ll \Phi_0 / (2\pi\mu_0\lambda_j d)$. В этом случае токи через переход тоже будут слабыми, и будет мала разность фаз волновых функций (джозефсоновская фаза) φ . Поэтому уравнение (195) в этом случае можно записать в виде уравнения

$$\lambda_j^2 \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \varphi, \quad (197)$$

решением которого является:

$$\varphi(x) = \varphi(0) \exp\left(-\frac{x}{\lambda_j}\right). \quad (198)$$

Подставляя это решение в (193), находим магнитное поле в переходе:

$$B(x) = \mu_0 H_0 \exp\left(-\frac{x}{\lambda_j}\right). \quad (199)$$

Отсюда видно, что величина λ_j , имеющая размерность длины, представляет собой глубину проникновения слабого магнитного поля в джозефсонов-

ский переход. Если принять, что $d \sim 10^{-5}$ см, $j_c \sim 10^2$ А/см², то λ_j оказывается порядка 0,1 мм, то есть вполне макроскопической величиной.

2.8.1 Джозефсоновские вихри

Поведение джозефсоновского перехода во внешнем магнитном поле во многом напоминает поведение сверхпроводника второго рода. Аналогично, когда внешнее поле превысит некоторое характерное поле H_{c1} , внутрь перехода начнут проникать сверхпроводящие вихри, несущие квант магнитного потока Φ_0 . Это так называемые джозефсоновские вихри.

Действительно, одно из возможных решений уравнения Феррелла — Преинджа, которое описывает одиночный джозефсоновский вихрь, имеет вид

$$\varphi_0(x) = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \exp \left[\frac{x - x_0}{\lambda_j} \right] \right\}, \quad (200)$$

где x_0 — центр вихря. Прямой подстановкой можно убедиться, что это решение удовлетворяет уравнению (195). При выполнении этой подстановки следует использовать формулы:

$$\sin 4A = \cos A \cdot (4 \sin A - 8 \sin^3 A), \quad (201)$$

$$\cos A = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 A}}, \quad (202)$$

$$\sin A = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 A}}. \quad (203)$$

Вид функций $\varphi_0(x)$, $d\varphi_0(x)/dx \propto B$ и $d^2\varphi_0(x)/dx^2 \propto j_s$ показан на рис. 39. Таким образом, джозефсоновский вихрь сильно вытянутый и имеет размер вдоль джозефсоновского перехода (вдоль оси x) порядка $2\lambda_j$, а в перпендикулярном направлении (вдоль оси y) — порядка $d = (2\lambda + t) \ll 2\lambda_j$. В центре вихря $\varphi_0(x_0) = \pi$, $d\varphi_0/dx|_{x_0} = 2/\lambda_j$, поэтому согласно (193), поле в центре вихря равно:

$$B(0) = \frac{\Phi_0}{(\pi\lambda_j d)}. \quad (204)$$

Начиная с поля H_{c1} проникновение джозефсоновских вихрей в переход становится энергетически выгодным. Проникшие вихри образуют линейную цепочку, и джозефсоновский элемент переходит в *смешанное состояние*. Однако, в отличие от абрикосовских вихрей в сверхпроводнике второго рода, джозефсоновский вихрь не имеет нормальной сердцевинки. Кроме того, для джозефсоновского перехода нет второго критического поля.

Найдем теперь первое критическое поле перехода. Для этого надо рассмотреть свободную энергию перехода, которая включает в себя энергию магнитного поля и энергию сверхпроводящего тока (кинетическую энергию носителей сверхпроводящего тока). Складывая плотности этих энергий и интегрируя вдоль всей длины перехода L , получим полную свободную энергию, отнесенную к единице его ширины (вдоль оси z):

$$W = \int_0^L dx \left[\frac{B^2 d}{2\mu_0} + \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right) \cdot j_c (1 - \cos\varphi) \right]. \tag{205}$$

Подставляя в полученное выражение связь индукции магнитного поля с производной джозефсоновской фазы (193), можно превратить W в функци-

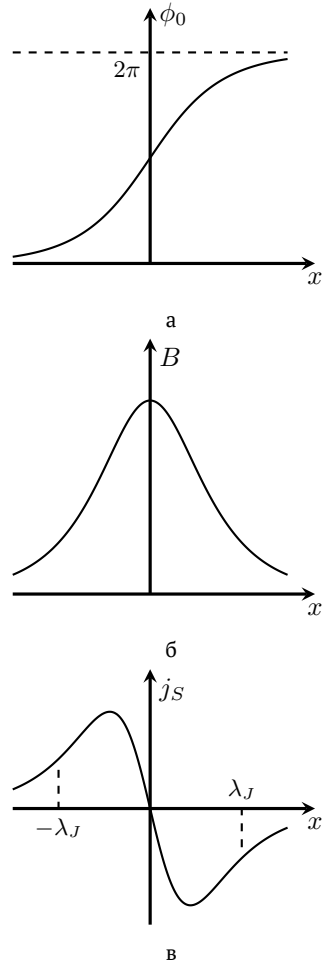


Рис. 39. Распределение (а) джозефсоновской фазы $\varphi_0(x)$, (б) магнитного поля B и (в) сверхтока j_S для джозефсоновского вихря.

онал относительно функции $\varphi(x)$:

$$W = \int_0^L dx \left\{ \left[\frac{\Phi_0^2}{8\pi^2\mu_0 d} \right] \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right) \cdot j_c (1 - \cos\varphi) \right\}. \quad (206)$$

Решение вариационной задачи на минимизацию этого функционала приводит снова к уравнению Феррелла — Преинджа (195).

Используя выражение (206), можно найти свободную энергию одиночного джозефсоновского вихря W_0 в бесконечном переходе. Для этого достаточно подставить выражение (200) для $\varphi_0(x)$ в (206) и проинтегрировать. В результате получаем энергию вихря, приходящуюся на единицу его длины:

$$W_0 = 8 (\Phi_0/2\pi) j_c \lambda_j. \quad (207)$$

Если на джозефсоновский переход воздействует внешнее поле H_0 , энергия Гиббса джозефсоновского перехода с одним джозефсоновским вихрем внутри перехода (отсчитанная от состояния в отсутствие поля и вихря) будет равна:

$$G_0 = W_0 - \Phi_0 H_0 \quad (208)$$

Равновесное состояние такой системы соответствует минимуму потенциала Гиббса. Поэтому видно, что при достаточно слабом внешнем поле $G_0 > 0$, существование джозефсоновского вихря внутри перехода энергетически невыгодно. Первое критическое поле H_{c1} — это такое внешнее поле H_0 , при котором G_0 становится равным нулю, и начиная с которого, существование вихря в переходе становится энергетически выгодным. Таким образом, напряженность поля:

$$H_{c1} = \frac{W_0}{\Phi_0} = \frac{4j_c \lambda_j}{\pi} = \frac{2\Phi_0}{\pi^2 \mu_0 \lambda_j d}, \quad (209)$$

индукция:

$$B_{c1} = \frac{4\mu_0 j_c \lambda_j}{\pi} = \frac{2\Phi_0}{\pi^2 \lambda_j d}. \quad (210)$$

Это поле немного меньше (в $\pi/2$ раз), чем поле (204) в центре вихря $B(x_0)$.

Поле $B(x_0)$ является полем «перегрева» мейсснеровского состояния перехода. Для того, чтобы вихрь смог войти в джозефсоновский переход, поле на краю перехода должно достигнуть величины $B(x_0) > B_{c1}$. Действительно, мейсснеровское состояние и соответственно экранирующий мейсснеровский ток при переходе от слабого внешнего поля к сильному могут быть описаны тем же самым решением (200), но с положением центра вихря $x_0 < 0$, т.е. снаружи от области джозефсоновского перехода. По мере увеличения внешнего поля точка x_0 приближается к границе джозефсоновского перехода. Вихрь сможет войти в джозефсоновский переход только после того, как точка x_0 достигнет края джозефсоновского перехода ($x = 0$), то есть, когда индукция внешнего поля достигнет величины $B(x_0)$.

2.8.2 Максимальный сверхпроводящий ток

Ток смещения I_b , пропускаемый через джозефсоновский переход (так называемый транспортный ток), воздействует с силой Лоренца на цепочку вихрей и может вызвать их периодическое движение, при котором вихри будут выходить из перехода на одном конце и входить в него на противоположном конце. Такое движение вихрей представляет собой нестационарный процесс джозефсоновской генерации — резистивное состояние, в котором имеет место диссипация энергии при совершении работы по перемещению магнитных вихрей. Движение цепочки вихрей возникает в случае, когда сила Лоренца превышает силу взаимодействия цепочки с краями джозефсоновского перехода (с мейсснеровским током на краях). Максимальный сверхпроводящий ток — это максимальный ток смещения, при котором цепочка вихрей остается неподвижной.

В общем случае анализ величины максимального сверхпроводящего тока достаточно сложен и, как правило, требует использования численных методов. Однако, в случае сильного внешнего магнитного поля такой анализ может быть выполнен аналитически [2]. Итак, рассмотрим случай сильного магнитного поля, когда выполняется условие

$$B_0 \gg \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_j d}. \quad (211)$$

Кроме того, предположим, что размер перехода $L \ll 2\lambda_j$, т.е. мы можем пренебречь собственным магнитным полем сверхтока, текущего через переход, по сравнению с B_0 . Неравенство (211) можно интерпретировать как условие того, что цепочка джозефсоновских вихрей в переходе сильно сжата, т.е. расстояние между соседними вихрями много меньше величины λ_j . В этих условиях поле внутри перехода можно считать постоянным и равным внешнему полю B_0 . Тогда из формулы (193) следует, что

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{2\pi d}{\Phi_0} B_0, \quad (212)$$

а интегрирование этого выражения дает:

$$\varphi(x) = \frac{2\pi d}{\Phi_0} B_0 x + C, \quad (213)$$

где C — произвольная константа интегрирования. Подставляя это значение фазы в джозефсоновское выражение для плотности сверхпроводящего тока, получаем

$$j_s = j_c \sin(2\pi x/a + C), \quad (214)$$

где введено обозначение

$$a = \frac{\Phi_0}{B_0 d}. \quad (215)$$

Из выражения (214) следует, что действительно в рассматриваемом случае в переходе существует плотно сжатая цепочка вихрей. Она схематически изображена на рис. 40, где показано также распределение туннельного сверхтока.

Полный ток через переход можно найти, проинтегрировав плотность сверхпроводящего тока по x вдоль всего перехода:

$$I_s = j_c \int_{-L/2}^{+L/2} \sin\left(\frac{2\pi x}{a} + C\right) dx. \quad (216)$$

В результате имеем:

$$I_s = j_c L \frac{\sin(\pi L/a)}{\pi L/a} \sin C. \quad (217)$$

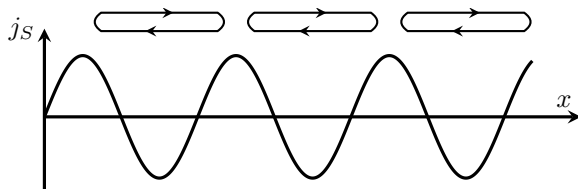


Рис. 40. Схематическое изображение смешанного состояния джозефсоновского туннельного перехода — плотно сжатая цепочка вихрей, а также распределение плотности туннельного сверхпроводящего тока, которое при этом возникает.

Из этой формулы следует, что при заданном магнитном поле изменение полного тока перехода I_s (задаваемого внешним источником) влечет за собой изменение константы C . Она подстраивается под каждое значение полного тока. Ясно, что максимальный бездиссипативный ток через переход будет равен модулю величины, стоящей перед $\sin C$ в формуле (217), т.е.

$$I_{\max} = I_c \left| \frac{\sin(\pi L/a)}{\pi L/a} \right|, \quad (218)$$

где введено обозначение

$$I_c = j_c L. \quad (219)$$

Данной формуле можно придать более удобный вид, если учесть, что, согласно выражению (215),

$$\pi L/a = \frac{\pi \Phi}{\Phi_0}, \quad (220)$$

где через Φ обозначен полный магнитный поток в джозефсоновском переходе:

$$\Phi = B_0 L d. \quad (221)$$

Таким образом, используя (220), получаем окончательно выражение для величины сверхпроводящего тока через джозефсоновский переход:

$$I_{\max} = I_c \left| \frac{\sin(\pi \Phi / \Phi_0)}{\pi \Phi / \Phi_0} \right|. \quad (222)$$

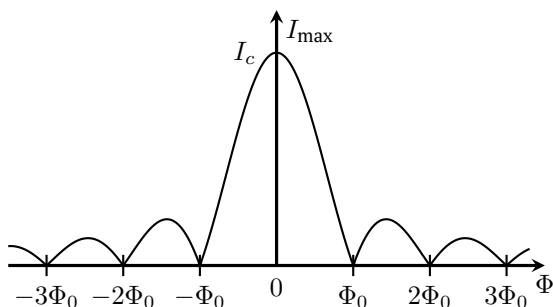


Рис. 41. Зависимость максимального бездиссипативного (сверхпроводящего) полного тока через джозефсоновский переход от внешнего магнитного потока Φ , связанного с полем B_0 , параллельным плоскости слабой связи, соотношением $B_0 = \Phi/(Ld)$.

Зависимость I_{\max} от внешнего магнитного поля $B_0 = \Phi/(Ld)$ изображена на рис. 41. Из полученной формулы следует, что смешанное состояние в переходе совершенно неустойчиво (достаточно ничтожно малого внешнего тока смещения, чтобы его разрушить) тогда, когда в переходе укладывается целое число квантов потока. Наоборот, оно наиболее устойчиво, когда магнитный поток в переходе равен полуцелому числу квантов потока. Если ток смещения превышает величину максимального сверхтока, возникает резистивное состояние - джозефсоновская генерация, сопровождающаяся движением вихрей (выходящих с одной стороны джозефсоновского перехода и входящих с другой стороны).

3 Сверхпроводящие квантовые интерферометры (СКВИДы)

Другой важный макроскопический квантовый эффект — эффект макроскопической квантовой интерференции — возникает, когда в сверхпроводящий контур (кольцо) включены джозефсоновские переходы (один или более). Такие устройства называются сверхпроводящими квантовыми интерферометрами. Они могут быть использованы как сверхчувствительные датчики магнитного поля (а также любой другой величины, которая может быть преобразована в магнитное поле). Такие интерферометры вместе с цепями снятия сигналов (но очень часто и сами интерферометры) называют *сквидами*. Это утвердившееся в русской научной и технической литературе слово возникло от английского сокращения SQUID (Superconducting Quantum Interference Device — сверхпроводящее квантовое интерференционное устройство).

Эффект Джозефсона вместе с эффектом макроскопической квантовой интерференции в сверхпроводниках являются квантово-физической основой создания всех устройств современной сверхпроводниковой электроники.

3.1 Одноконтактный интерферометр

Сверхпроводящее кольцо, замкнутое одним джозефсоновским переходом, называют одноконтактным сверхпроводящим квантовым интерферометром (а также часто — одноконтактным сквидом). На рис. 42 показан схематически такой интерферометр, а также его эквивалентная схема.

Чтобы получить систему уравнений, описывающих интерферометр, нужно учесть, что напряжение V на джозефсоновском переходе может появиться здесь только в результате изменения во времени потока Φ магнитного поля через кольцо:

$$V = \frac{d\Phi}{dt}. \quad (223)$$

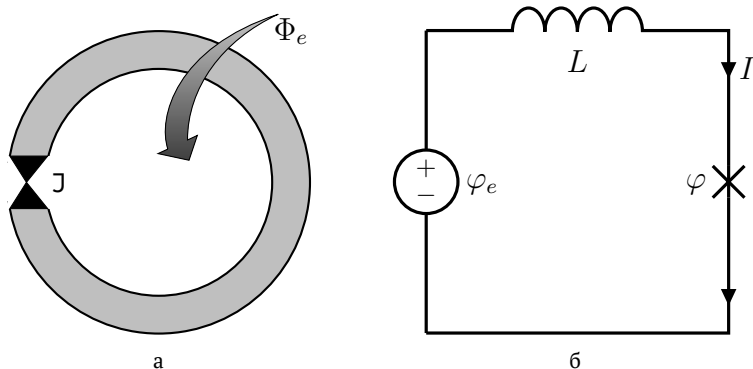


Рис. 42. (а) одноконтактный сверхпроводящий квантовый интерферометр и (б) его эквивалентная схема.

Подставляя V из этой формулы в джозефсоновское соотношение между V и φ (84) и интегрируя его по времени, получаем столь же фундаментальное соотношение, справедливое для любого сверхпроводящего кольца с джозефсоновским переходом,

$$\varphi = \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}, \quad (224)$$

где $\Phi_0 = h/(2e)$ – квант магнитного потока.

Таким образом, джозефсоновская фаза φ оказывается жестко связанной с потоком магнитного поля через сверхпроводящее кольцо. Это замечательное явление носит название *макроскопической квантовой интерференции* в сверхпроводниках. Можно сказать, что магнитное поле, взаимодействуя со сверхпроводником, «закручивает» фазу волновой функции конденсата куперовских пар. Это происходит и в отсутствие джозефсоновского перехода в сверхпроводящем кольце, но тогда это приводит к квантованию магнитного потока в сверхпроводящем кольце (79), рассмотренному выше.

Чтобы теперь получить замкнутую систему уравнений для интерферометра, нужно учесть, что вклад в магнитный поток Φ дает не только поток Φ_e от внешнего источника, но и ток I через кольцо:

$$\Phi = \Phi_e - LI. \quad (225)$$

Это уравнение, используя формулу (224), удобно переписать в виде

$$\varphi = \varphi_e - li, \quad (226)$$

где φ_e — формально введенная «внешняя фаза» (нормированный внешний поток):

$$\varphi_e \equiv 2\pi\Phi_e/\Phi_0, \quad (227)$$

а l — основной параметр интерферометра — безразмерная индуктивность:

$$l \equiv 2\pi \frac{I_c L}{\Phi_0} = \frac{L}{L_c}. \quad (228)$$

Уравнения (225) и (226) показывают, что эквивалентную схему интерферометра можно представить в виде, показанном на рис. 42б, где кружок обозначает «генератор фазы», а величину $l \cdot i$ можно трактовать как падение фазы на индуктивности L .

В сверхпроводящем состоянии ($\dot{\varphi} = 0$) ток в кольце $I = I_c \sin(\varphi)$, уравнение (226) принимает вид:

$$\varphi = \varphi_e - l \cdot \sin(\varphi). \quad (229)$$

Статическая диаграмма состояния одноконтактного интерферометра $\varphi(\varphi_e)$ при разных величинах безразмерной индуктивности l показана на рис. 43а. Эта зависимость 2π -периодична, что соответствует Φ_0 -периодичности зависимости $\Phi(\Phi_e)$. Эта зависимость близка к линейной при малых значениях безразмерной индуктивности ($l < 1$). С увеличением l зависимость становится более извилистой. При $l = 1$ наклон этой кривой в точках $\varphi_e = 2\pi n + \pi$ соответствует вертикальной касательной, а далее при $l > 1$ появляются неустойчивые участки с отрицательным наклоном. Размер этих участков увеличивается с ростом l .

На рис. 43б показаны только устойчивые участки диаграммы $\varphi(\varphi_e)$, которые будут наблюдаться при больших значениях параметра l . Стрелками вверх показаны скачки φ (и потока Φ), происходящие при увеличении внешнего потока, а стрелками вниз — скачки при уменьшении приложенного

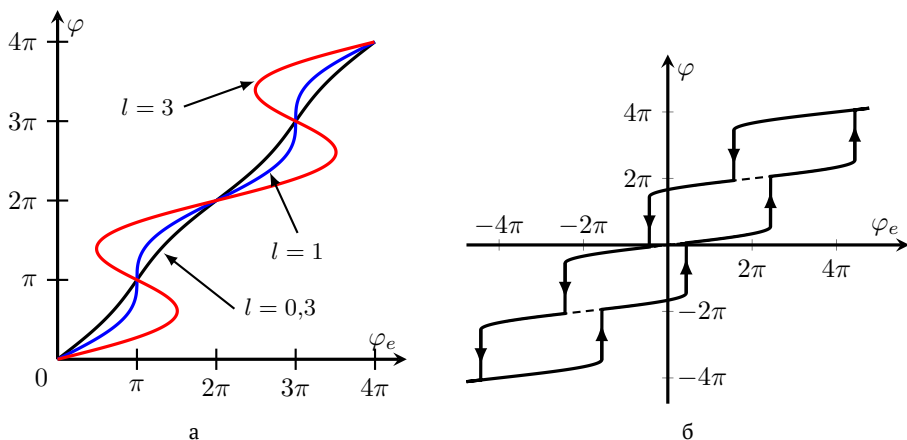


Рис. 43. (а) статическая диаграмма состояния одноконтактного интерферометра φ (φ_e) при разных значениях безразмерной индуктивности $l = 0,3; 1; 3$ и (б) наблюдаемые устойчивые участки состояний при больших значениях параметра $l = 6$ ($l \gg 1$).

внешнего потока, когда ток в кольце достигает величины критического тока I_c . Во время скачка $\dot{\varphi} \neq 0$, фаза джозефсоновского перехода быстро изменится на величину, которая меньше, чем 2π , т.е. магнитный поток изменится меньше, чем на величину кванта потока. Это можно назвать лишь приближенным квантованием потока в сверхпроводящем одноконтактном интерферометре (в отличие от точного квантования потока в отверстии сплошного сверхпроводника и сплошном кольце).

3.2 Двухконтактный интерферометр

Сверхпроводящее кольцо, которое содержит два джозефсоновских перехода, называют двухконтактным сверхпроводящим квантовым интерферометром (а также часто — двухконтактным сквидом). На рис. 44 показан схематически двухконтактный интерферометр, а также его эквивалентная схема. Такое устройство интересно тем, что позволяет наблюдать интерференционные эффекты на постоянном токе, если подключить источник внешнего тока I к разным полукольцам, как показано на этом рисунке.

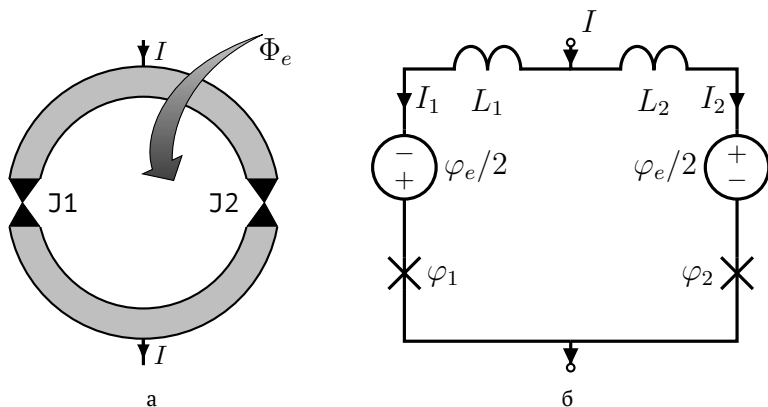


Рис. 44. (а) двухконтактный сверхпроводящий квантовый интерферометр и (б) его эквивалентная схема.

Повторяя те же рассуждения, что и в случае одноконтактного интерферометра, считая положительным направлением протекания токов I_1 и I_2 через плечи (стороны) интерферометра направление сверху вниз, и в случае, если

$$I = I_1 + I_2, \quad (230)$$

получаем аналогично (224) интерференционное соотношение

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}. \quad (231)$$

Далее нужно учесть магнитный поток, создаваемый токами, протекающими через противоположные плечи интерферометра, и тогда приходим к следующему уравнению:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_e - l_1 i_1 + l_2 i_2, \quad (232)$$

где i_1 и i_2 — нормированные токи через плечи интерферометра, l_1 и l_2 — нормированные индуктивности плеч интерферометра. Для простоты будем считать, что джозефсоновские переходы имеют одинаковые крити-

ческие токи I_c , тогда:

$$i_1 = \frac{I_1}{I_c}, \quad i_2 = \frac{I_2}{I_c}, \quad (233)$$

$$l_1 = \frac{2\pi I_c L_1}{\Phi_0}, \quad l_2 = \frac{2\pi I_c L_2}{\Phi_0}. \quad (234)$$

В отсутствие приложенного постоянного тока I статическая диаграмма $\Phi(\Phi_e)$ или $\varphi(\varphi_e)$, где $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, выглядит так же, как и для одноконтakтного интерферометра. При больших значениях индуктивного параметра $l = l_1 + l_2$, когда $l > 1$, плавное изменение (увеличение или уменьшение) приложенного внешнего магнитного потока Φ_e будет приводить к скачкам полного магнитного потока Φ , а также фазы джозефсоновского перехода с наименьшим критическим током (например, вследствие технологического разброса).

Рассмотрим состояния интерферометра при пропускании через него тока i . Начнем со случая интерферометра с малой индуктивностью, когда $l \ll 1$. В этом случае магнитным полем токов в плечах интерферометре можно пренебречь, и для сверхпроводящего состояния интерферометра получаем следующие уравнения:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_e, \quad (235)$$

$$I = I_{c1} \sin(\varphi_1) + I_{c2} \sin(\varphi_2), \quad (236)$$

которые приводят к уравнению:

$$I = I_{c1} \sin(\varphi_2 + \varphi_e) + I_{c2} \sin(\varphi_2) = I_0 \sin(\varphi^*), \quad (237)$$

где

$$I_0^2 = I_{c1}^2 + I_{c2}^2 + 2I_{c1}I_{c2} \cos(\varphi_e) \quad (238)$$

и

$$\varphi^* = \varphi_2 + \text{const}. \quad (239)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что интерферометр ведет себя как джозефсоновский переход с критическим током I_0 , зависящим, как следует из (238), от приложенного внешнего потока. В случае симметричного ин-

терфферометра его критический ток

$$I_0 = 2I_c \left| \cos \left(\frac{\varphi_e}{2} \right) \right| \quad (240)$$

изменяется периодически от $2I_c$, когда приложен магнитный поток, равный целому числу квантов потока, до 0 при полуцелом значении числа квантов потока.

Учет индуктивности кольца интерферометра приводит к ненулевой величине минимального критического тока интерферометра. Это значение увеличивается с увеличением величины безразмерной индуктивности l , как показано на рис. 45.

Изменение критического тока двухконтактного интерферометра I_0 под влиянием приложенного магнитного потока может быть легко преобразовано в изменение напряжения на интерферометре, если его джозефсоновские переходы имеют безгистерезисную ВАХ. В таком интерферометре изменение критического тока приводит к смещению (вверх или вниз) резистивной ветви его ВАХ. Поэтому для изменения функции преобразования приложенного магнитного потока в напряжение необходимо задать через интерферометр постоянный ток смещения, равный или немного превышающий максимальную величину его критического тока. Это необходимо, чтобы реализовать резистивное состояние, наиболее близкое к начальной точке резистивной ветви ВАХ для увеличения получаемого сигнала $V(\Phi_e)$, называемого часто откликом напряжения.

Образование отклика напряжения, являющегося периодическим с периодом Φ_0 , иллюстрируется на рис. 46. При непрерывном линейном увеличе-

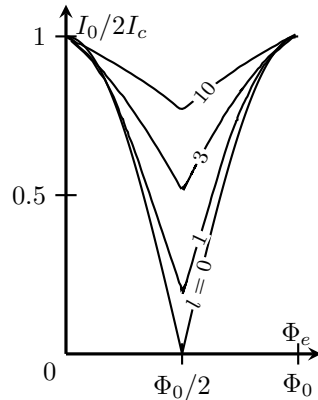


Рис. 45. Фрагмент периодической зависимости критического тока симметричного двухконтактного интерферометра от величины приложенного магнитного потока при разных значениях безразмерной индуктивности интерферометра l .

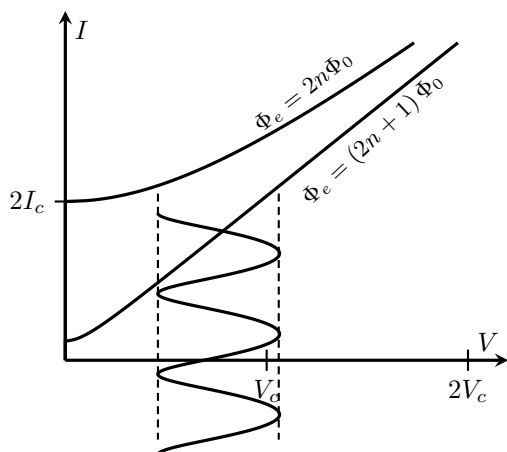


Рис. 46. Образование отклика напряжения сквида постоянного тока $V(\Phi)$ на приложенный магнитный поток при его непрерывном линейном увеличении. Верхняя ВАХ сквида соответствует потоку, равному целому числу квантов Φ_0 , нижняя — полуцелому числу квантов.

нии приложенного магнитного потока напряжение V на интерферометре изменяется по периодическому закону от минимального до максимального значений. Максимальную крутизну преобразования потока в напряжение V_Φ можно оценить как $\sim 2V_c/\Phi_0$.

Такое устройство (рис. 47а) на основе двухконтактного интерферометра, смещенного постоянным током, получило название *сквида постоянного тока* (dc SQUID). Чувствительность современных магнитометров на основе таких сквидов может достигать значений $\sim (10^{-6} \dots 10^{-7}) \Phi_0/\sqrt{\text{Гц}}$ по потоку и $\sim (1 \dots 10) h$ по энергии.

Для того, чтобы использовать одноконтактный интерферометр в качестве высокочувствительного датчика магнитного сигнала, его необходимо связать индуктивно с колебательным контуром, находящимся под воздействием источника переменного тока с частотой, близкой к резонансной частоте контура, как показано на рис. 47б. Измеряемый магнитный сигнал Φ_e , который приложен к интерферометру, влияет на амплитуду вынужденных колебаний в контуре [7–9]. Это изменение амплитуды колебаний по сути является уже выходным сигналом. Высокочастотный сигнал, снимае-

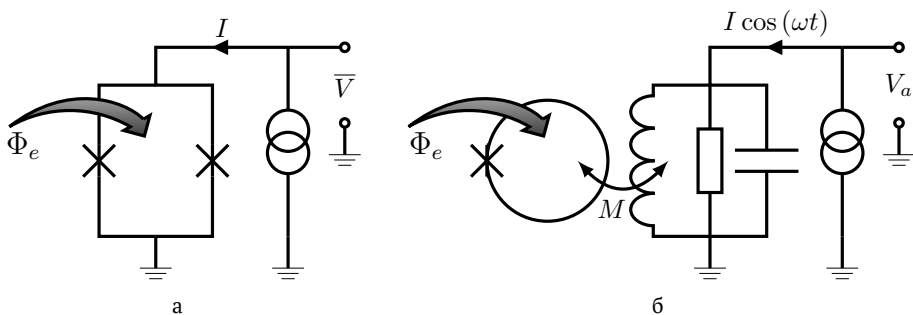


Рис. 47. Сквиды (а) постоянного тока (dc SQUID) и (б) переменного тока (rf SQUID).

мый с контура демодулируют, получая выходное напряжение $V \propto \Phi_e$. Такое устройство принято называть *сквидом переменного тока* (rf SQUID).

Кроме двух типов сквидов на основе одно- и двухконтактных интерферометров, существует также *би-сквид*, который является модернизацией сквида постоянного тока за счет добавления в двухконтактный интерферометр третьего джозефсоновского перехода, как показано на рис. 48. В результате этого образуются два контура: контур одноконтактного интерферометра и контур двухконтактного (формально трехконтактного) интерферометра. Такие изменения сделаны для того, чтобы повысить линейность преобразования магнитного сигнала в выходное напряжение сквида постоянного тока на каждом полупериоде его периодического отклика напряжения, т.е. сделать форму отклика напряжения ближе к пилообразной форме. Магнитный сигнал Φ_e прикладывается к контуру одноконтактного сквида и преобразуется по нелинейному закону (229) в фазу φ_3 третьего (добавленного) джозефсоновского перехода. Поскольку этот джозефсоновский переход включен также и в другой контур, его фазу можно рассматривать как внешнюю фазу, приложенную к двухконтактному интерферометру, что эквивалентно приложению к контуру двухконтактного интерферометра магнитного сигнала $\Phi_3 = \Phi_0 \cdot \varphi_3 / (2\pi)$. Таким образом, преобразование входного магнитного сигнала в выходное напряжение V проходит две стадии нелинейного преобразования: $\Phi_e \rightarrow \Phi_3 \rightarrow V$. Поскольку эти нелинейные преобразования имеют противоположную кривизну (отклонения в разные

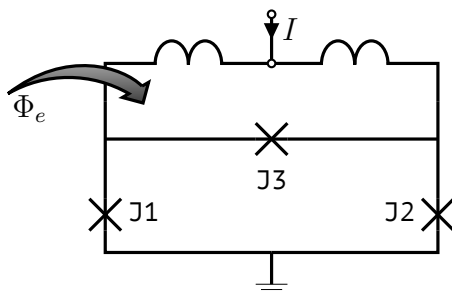


Рис. 48. Схема сверхпроводящего квантового интерферометра би-скивида, являющегося модернизацией скивида постоянного тока.

стороны от линейного преобразования), то можно добиться хорошей взаимной компенсации этих отклонений от линейности преобразования и получить форму отклика выходного напряжения би-скивида, очень близкую к треугольному виду [21].

Список литературы

1. *Kamerlingh Onnes H.* Further experiments with liquid helium. D. On the change of electric resistance of pure metals at very low temperatures, etc. V. The disappearance of the resistance of mercury. // Communication from the Physical Laboratory of the University of Leiden. — 1911. — 122b.
2. *Шмидт В. В.* Введение в физику сверхпроводников. — 2-ое изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2000. — С. 402. — ISBN 978-5-900916-68-2.
3. Applied Superconductivity / ed. by P. Seidel. — Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2015. — 1336 p. — (Encyclopedia of Applied Physics). — ISBN 978-3-527-41209-9. — DOI: 10.1002/9783527670635.
4. *Cooper L. N.* Bound Electron Pairs in a Degenerate Fermi Gas // Physical Review. — 1956. — Vol. 104, no. 4. — P. 1189–1190. — DOI: 10.1103/physrev.104.1189.
5. *Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R.* Theory of Superconductivity // Physical Review. — 1957. — Vol. 108, no. 5. — P. 1175–1204. — DOI: 10.1103/physrev.108.1175.
6. *Josephson B.* Possible New Effects in Superconducting Tunnelling // Physics Letters. — 1962. — Vol. 1. — P. 251–253. — DOI: 10.1016/0031-9163(62)91369-0.
7. *Лихарев К. К., Ульрих Б. Т.* Системы с джозефсоновскими контактами. Основы теории. — М.:Изд-во Моск. Ун-та., 1978. — С. 448.

8. *Лихарев К. К.* Введение в динамику джозефсоновских переходов. — М. : «Наука», Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1985. — С. 319.
9. *Likharev K.* Dynamics of Josephson Junctions and Circuits. — Gordon, Breach Science Publishers, 1986. — ISBN 978-2-88124-042-3.
10. *McCumber D.* Effect of ac Impedance on dc Voltage-Current Characteristics of Superconductor Weak-Link Junctions // Journal of Applied Physics. — 1968. — Vol. 39. — P. 3113–3118. — DOI: 10.1063/1.1656743.
11. *Stewart W.* Current-voltage Characteristics of Josephson Junctions // Applied Physics Letters. — 1968. — Vol. 12. — P. 277–280. — DOI: 10.1063/1.1651991.
12. *Scott W. C.* Hysteresis in the dc switching characteristics of josephson junctions // Applied Physics Letters. — 1970. — Vol. 17, no. 4. — P. 166–169. — DOI: 10.1063/1.1653350.
13. PSCAN'96: new software for simulation and optimization of complex RSFQ circuits / S. Polonsky [et al.] // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. — 1997. — Vol. 7, no. 2. — P. 2685–2689. — DOI: 10.1109/77.621792.
14. *Shevchenko P.* PSCAN2: Superconductor Circuit Simulator. — 2016. — URL: <http://pscan2sim.org/documentation.html> (дата обр. 22.04.2026).
15. *Корнев В.* Введение в работу с программным пакетом PSCAN в практикуме по сверхпроводниковой электронике. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2012.
16. *Odintsov A., Semenov V., Zorin A.* Specific problems of numerical analysis of the Josephson junction circuits // IEEE Transactions on Magnetics. — 1987. — Vol. 23, no. 2. — P. 763–766. — DOI: 10.1109/TMAG.1987.1064907.
17. Joint x-ray and neutron refinement of the structure of superconducting $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$: Precision structure, anisotropic thermal parameters, strain, and cation disorder / A. Williams [et al.] // Physical Review B. — 1988. — Vol. 37, no. 13. — P. 7960–7962. — DOI: 10.1103/physrevb.37.7960.
18. *Hilgenkamp H., Mannhart J.* Grain boundaries in high-T_csuperconductors // Reviews of Modern Physics. — 2002. — Vol. 74, no. 2. — P. 485–549. — DOI: 10.1103/revmodphys.74.485.
19. Phase-sensitive evidence for $d_{x^2-y^2}$ -pairing symmetry in the parent-structure high- T_c cuprate superconductor $\text{Sr}_{1-x}\text{La}_x\text{CuO}_2$ / J. Tomaschko [et al.] // Physical Review B. — 2012. — Vol. 86, no. 9. — P. 094509. — DOI: 10.1103/physrevb.86.094509.
20. *Shapiro S.* Josephson Currents in Superconducting Tunneling: The Effect of Microwaves and Other Observations // Physical Review Letters. — 1963. — Vol. 11, no. 2. — P. 80–82. — DOI: 10.1103/physrevlett.11.80.
21. *Корнев В. К., Колотинский Н. В.* Би-сквид: физические основы. — М. : Издательский отдел Физического факультета МГУ, 2019. — С. 28.

Учебное пособие

Корнев Виктор Константинович
Колотинский Николай Васильевич

ДЖОЗЕФСОНОВСКИЕ СТРУКТУРЫ

Оригинал-макет подготовлен авторами

ООО «Эдитус»
125565, Москва, Ленинградское шоссе, д. 80, стр. 1
8 (800) 775-30-87
www.editus.ru

Отпечатано в типографии ООО Фирма «П-Центр»
129515, г. Москва, ул. Академика Королёва, 13

Подписано в печать 29.04.2026
Формат 148x210. Усл. печ. л. 6,75
Печать цифровая. Бумага офсетная
Тираж 100 экз. Заказ № 202604275

ISBN 978-5-00217-830-8

