



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Корнев В.К., Колотинский Н.В.

Би-сквид: физические основы

Москва
2019

УДК 621.396.6-973:538.945(078)

ББК 32.855

К67

*Рекомендовано к изданию Ученым советом Физического факультета
Московского Государственного Университета имени М.В. Ломоносова*

Рецензенты:

д.ф.-м.н., проф. О.В. Снигирев (МГУ имени М.В. Ломоносова)

д.ф.-м.н., проф. В.П. Митрофанов (МГУ имени М.В. Ломоносова)

Корнев В.К., Колотинский Н.В.

К67 Би-сквид: физические основы: учебное пособие / В.К. Корнев, Н.В. Колотинский — М.:Издательский отдел Физического факультета МГУ, 2019 — 28 с.:ил.

Учебное пособие содержит описание нового типа сверхпроводящего квантового интерференционного устройства – би-сквида, включающего в свой состав одновременно одно- и двух-контактный сквиды. Входной магнитный сигнал претерпевает в этом устройстве последовательно два нелинейных преобразования, в основе которых лежат макроскопические квантовые эффекты в сверхпроводниках. В силу того, что эти нелинейные преобразования могут быть сделаны взаимнообратными в достаточно широком диапазоне, в би-сквиде достигается высокая линейность результирующего преобразования входного магнитного сигнала в напряжение. В отличие от одно- и двух-контактного сквидов, использующихся в системах с ограниченной полосой частот сигналов, би-сквид позволяет создавать широкополосные устройства с высокой линейностью сигнальных характеристик. Это крайне актуально для решения многих задач в области сверхпроводниковой электроники, в том числе, для развития новых технологий широкополосного приема и обработки сигналов.

Материал данного учебного пособия относится к читаемым на кафедре атомной физики, физики плазмы и микроэлектроники физического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова курсам «Джозефсоновские структуры», «Динамика джозефсоновских систем», «Основы сверхпроводниковой электроники» для студентов четвертого и пятого курсов, обучающихся по специальности «физическая электроника»; представляется крайне полезным для подготовки специалистов в области современных микро- и нано-технологий.

УДК 621.396.6-973:538.945(078)

ББК 32.855

© Корнев В.К., Колотинский Н.В., 2019

Оглавление

1	Введение	4
2	Основная идея би-сквида	7
3	Аналитическая теория	11
4	Учет влияния джозефсоновской генерации	17
5	Влияние общей части индуктивностей контуров	20
6	Динамический диапазон линейного преобразования	22
	Список литературы	26

1. Введение

Скви́ды (сверхпроводящие квантовые интерференционные датчики, *англ.*: *SQUIDS – Superconducting Quantum Interference Devices*), представляющие собой сверхпроводящее кольцо с включенными в него одним или двумя джозефсоновскими переходами (рис. 1), хорошо известны и широко используются как очень чувствительные преобразователи приложенного магнитного потока Φ_e в напряжение, обладающие, однако, ограниченной линейностью отклика на напряжения на магнитный сигнал [1–3].

Одно-контактный датчик, в котором джозефсоновский элемент находится всегда в сверхпроводящем состоянии, используется вместе с индуктивно связанным с ним добротным колебательным контуром (рис. 2а), в котором существуют вынужденные колебания под действием источника переменного тока. В силу этого такой сквид называют также сквидом переменного тока

(*ac SQUID* или *rf SQUID*). Откликом на приложенный магнитный поток Φ_e в этом устройстве является изменение амплитуды колебаний в контуре.

Использование двух-контактного датчика осуществляется в режиме резистивного состояния джозефсоновских элементов, когда к датчику приложен постоянный ток смещения $I_b > 2I_c$, где I_c – критический ток джозефсоновских элементов (рис. 2б). Поэтому такой сквид называют также сквидом постоянного тока (*dc SQUID*). В таких сквидах используются джозефсоновские переходы с достаточно малой емкостью, когда их вольт-амперная характеристика (ВАХ) имеет безгистерезисный вид. Откликом сквида постоянного тока

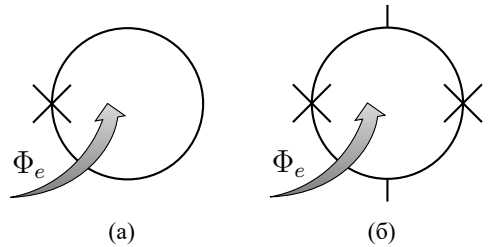


Рис. 1. Одно- (а) и двух- (б) контактные сверхпроводящие квантовые интерференционные датчики (сквиды, *англ.* *SQUIDS*).

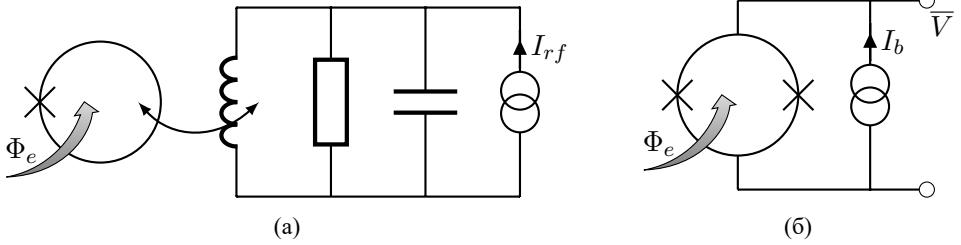


Рис. 2. (а) Сквид переменного тока; $I_{rf} = A \sin(\Omega t)$, $\Omega \approx (LC)^{-1/2}$. Выходным сигналом является изменение амплитуды напряжения вынужденных колебаний на колебательном контуре. (б) Сквид постоянного тока; ток смещения $I_b \geq 2I_c$. Выходным сигналом является изменение среднего напряжения на скивде \bar{V} (усредненного по джозефсоновской генерации).

на приложенный магнитный поток Φ_e является изменение среднего напряжения \bar{V} (усредненного по джозефсоновской генерации) на этом датчике.

Величина максимального сверхпроводящего тока I_0 через двух-контактный сквид является периодической функцией приложенного магнитного потока Φ_e , и, следовательно, положение резистивной ветви ВАХ скивда также является периодической функцией потока Φ_e . Поэтому, при фиксированном токе смещения $I_b > 2I_c$ напряжение на таком датчике $\bar{V}(\Phi)$ изменяется периодически вместе с изменением максимального сверхпроводящего тока. Эти свойства иллюстрирует рисунок 3, где показана ВАХ скивда постоянного тока, а также зависимости максимального сверхпроводящего тока и напряжения от приложенного магнитного потока.

В низкочастотных устройствах на основе скивдов высокая линейность и большой динамический диапазон сигналов достигаются за счет использования внешней цепи следящей обратной связи (см. рис. 4), которая динамически компенсирует приложенный магнитный поток (входной сигнал) для удержания неизменной величины напряжения на скивде (равной величине V_0). При этом выходным сигналом является напряжение на выходе интегратора цепи

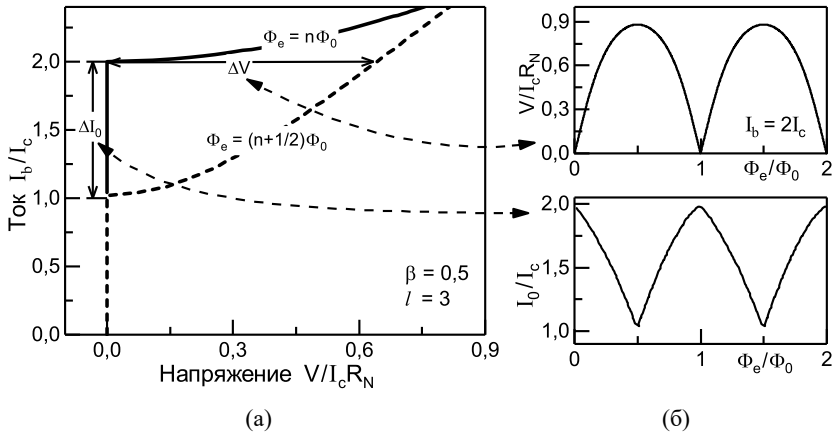


Рис. 3. (а) Вольт-амперная характеристика скивида постоянного тока в отсутствие приложенного к нему магнитного потока или в случае приложения целого числа квантов потока $\Phi = n\Phi_0$ (сплошная линия) и при $\Phi = (n + 1/2)\Phi_0$ (пунктирная линия); (б) отклик напряжения на приложенный магнитный поток $V = \bar{V}(\Phi_e)$ и зависимость максимального сверхпроводящего тока от приложенного магнитного потока $I_{S,max}(\Phi)$. Нормированная индуктивность скивида $l \equiv 2\pi I_c L/\Phi_0 = 3$, параметр Маккамбера (нормированная емкость джозефсоновских переходов) $\beta \equiv 2\pi I_c R_N^2 C/\Phi_0 = 0,5$. Здесь I_c и R_N – соответственно критический ток и нормальное сопротивление джозефсоновских переходов, C – емкость.

слежения (пропорциональное потоку, компенсирующему входной сигнал). Такая цепь обратной связи способна выполнять свои функции только до определенных частот, не превышающих 1 МГц, и поэтому не может быть использована в устройствах, предназначенных для приема и усиления высокочастотных сигналов.

В то же время, макроскопические квантовые эффекты в сверхпроводниках, лежащие в основе работы скивдов, являются крайне широкополосными; их эффективное использование возможно вплоть до появления интенсивных потерь в сверхпроводниках на частотах, при которых энергия фотонов достигает и превышает величину щели в энергетическом спектре сверхпроводника (~ 700 ГГц для ниобия и $\sim 1,1$ ТГц для нитрида ниобия).

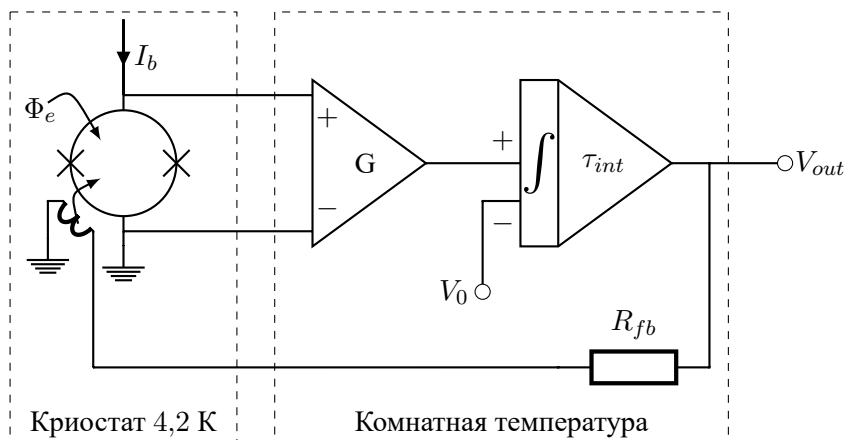


Рис. 4. Цепь следящей обратной связи в сквиде постоянного тока.

Би-сквид – устройство, позволяющее получить высокую линейность преобразования приложенного магнитного сигнала в выходное напряжение. Поэтому би-сквид открывает новые возможности для создания высокочастотных систем с высокой чувствительностью, присущей сквидам, и большим линейным динамическим диапазоном, который необходим для создания широкополосных систем.

2. Основная идея би-сквида

Для линейризации функции отклика напряжения двухконтактного сквида постоянного тока было предложено ввести дополнительную нелинейную трансформацию сигнала во входной цепи сквида [4, 5]. Для этой цели параллельно основной индуктивности двухконтактного сквида был включен третий джозефсоновский переход (см. схему на рис. 5а), который находится всегда в сверхпроводящем состоянии и играет роль нелинейной индуктивности. Такая модификация сквида постоянного тока превращает его в би-сквид. Дополнительно включенный джозефсоновский переход и основная геометрическая ин-

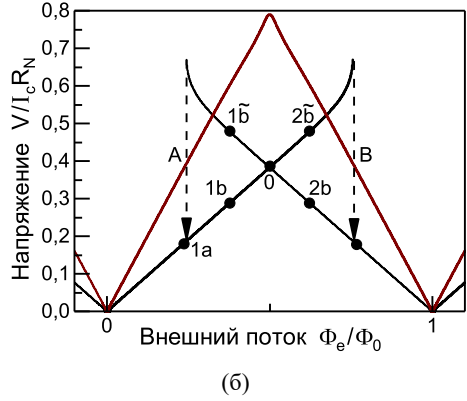
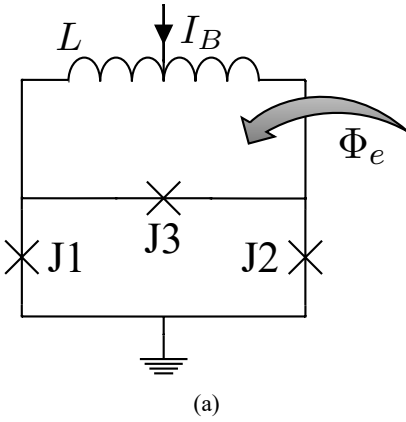


Рис. 5. (а) би-сквид; (б) максимально линейный отклик напряжения $V(\Phi_e)$ би-сквида, имеющий треугольный вид при $l \equiv 2\pi I_c L / \Phi_0 \leq 1$ и гистерезисный при $l > 1$. Здесь I_c – критический ток основных джозефсоновских переходов J1 и J2. Варианты выбора рабочих точек (для обсуждения) на гистерезисном отклике показаны точками 1a, 1b, 1b̄, а также 2a, 2b, 2b̄. Штриховыми стрелками показаны скачки напряжения при увеличении/уменьшении приложенного магнитного потока.

дуктивность L образуют одноконтактный сквид, осуществляющий нелинейное преобразование магнитного потока Φ_e входного сигнала в сигнальную составляющую $\overline{\varphi_3}$ (усредненную по частоте джозефсоновских осцилляций основных джозефсоновских переходов J1 и J2) фазы третьего джозефсоновского перехода φ_3 , которая в этом устройстве одновременно равна сигнальной составляющей разности фаз джозефсоновских переходов $\overline{\varphi_2 - \varphi_1}$ двухконтактного сквида (сигнальная составляющая фазы – величина, получаемая в результате усреднения по частоте джозефсоновских осцилляций основных джозефсоновских переходов J1 и J2). Это нелинейное преобразование может быть сделано обратным по отношению к последующему нелинейному преобразованию разности фаз $\Delta\varphi$ в постоянную составляющую напряжения V и, таким образом, получить результирующее линейное преобразование входного сигнала в напряжение как показано на рис. 5б.

Отклик напряжения би-сквида является периодической функцией магнитного потока Φ ; максимальная линейность сторон отклика $V(\Phi)$ достигается при треугольной форме отклика в случае, когда нормированная индуктивность $l \equiv 2\pi I_c L / \Phi_0 \leq 1$, и при гистерезисной форме отклика в случае, когда $l > 1$. Здесь I_c – критический ток основных джозефсоновских переходов J1 и J2. Основная идея построения би-сквида и осуществления двух последовательных взаимно-обратных нелинейных преобразований сигнала в нем показана на рис. 6.

Основным параметром, который позволяет регулировать форму отклика напряжения, является относительная величина критического тока третьего джозефсоновского перехода $i_{c3} = I_{c3}/I_c$. Этот параметр определяет величину эффективной безразмерной индуктивности $l^* = i_{c3}l$. При $l^* > 1$ отклик напряжения имеет гистерезисный вид, а при $l^* \approx 1$ форма отклика близка к

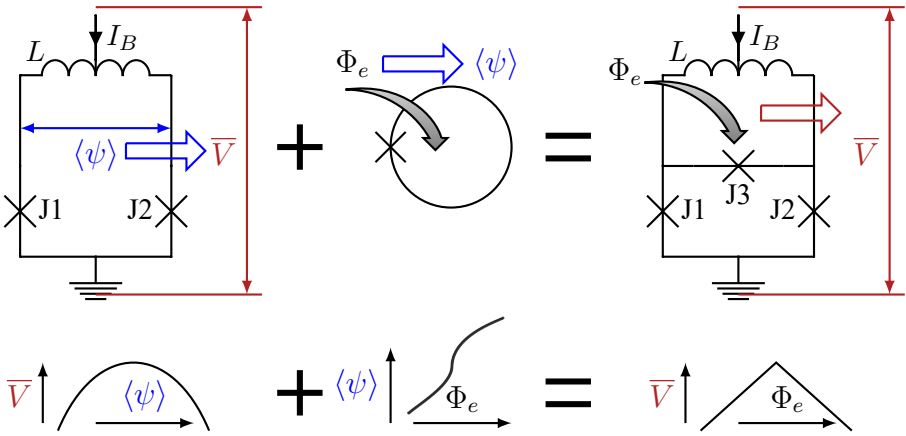


Рис. 6. Основная идея построения би-сквида и двух последовательных преобразований сигнала в нем: нелинейное преобразование приложенного магнитного потока Φ_e (входного сигнала) в сигнальную составляющую (усредненную по частоте джозефсоновских осцилляций) разности фаз $\langle \psi \rangle \equiv \bar{\varphi}_3 = \bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1$ и затем нелинейное преобразование $\langle \psi \rangle$ в напряжение V . В области, где эти преобразования имеют взаимно-обратный вид, отклик напряжения $V(\Phi)$ линейный.

треугольной. Наилучшая линейность отклика напряжения достигается заданием оптимальной величины $i_{сз}$ (и, следовательно, l^*), которая зависит от величины нормированной индуктивности l [6, 7]. Эта зависимость, рассчитанная с помощью численного моделирования, показана на рис. 7. Линейность основного участка отклика напряжения би-сквида, показанная также на этом рисунке, была вычислена путем реализации численно техники одно-тонового метода анализа, который используется при экспериментальном изучении линейности широкополосных систем. Согласно этому методу, на вход устройства подается синусоидальный сигнал, измеряются амплитуды основного тона a_1 и гармоник a_k выходного сигнала и затем линейность Lin вычисляется по формуле:

$$Lin = 20 \lg [a_1 / \max \{a_k\}]. \quad (1a)$$

Полученная величина линейности является характеристикой линейности участка отклика напряжения $V_2 - V_1 = \Delta V$, равного размаху выходного сигнала $2a_1$.

Кроме одно-тонового теста, на практике также принято использовать двух-тоновый метод анализа (эквивалентный по своему результату), согласно которому на вход устройства подаются два синусоидальных сигнала одинаковой амплитуды с относительно близкими частотами Ω_1 и Ω_2 , измеряется амплитуда основного тона этих сигналов на выходе ($a_1 = a_2$) и амплитуды a_{nm} компонент выходного сигнала на комбинационных частотах ($n\Omega_1 \pm m\Omega_2$) – амплитуды интермодуляционных искажений, а затем линейность Lin вычисляется по формуле:

$$Lin = 20 \lg [a_1 / \max \{a_{nm}\}] \quad (16)$$

Для многих практических устройств наиболее вредными признаются интермодуляционные компоненты третьего порядка на частотах ($2\Omega_1 - \Omega_2$) и ($2\Omega_2 - \Omega_1$), наиболее близких к частотам основного тона сигналов (Ω_1 и Ω_2).

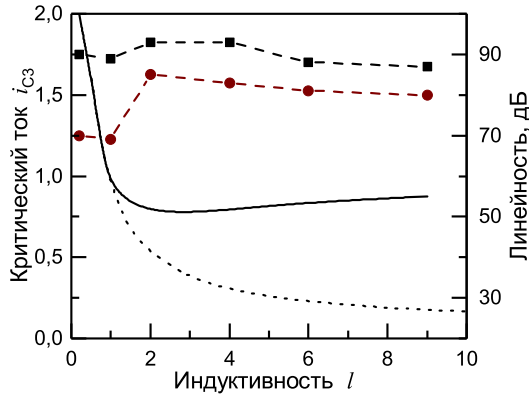


Рис. 7. Зависимость оптимальной величины i_{c3} для достижения наилучшей линейности отклика би-сквида (треугольной формы при $l \leq 1$ и гистерезисной при $l > 1$) от величины нормированной индуктивности l (сплошная линия); пунктирная линия соответствует отклику напряжения, близкого к треугольному виду при $l > 1$ (с линейностью ~ 40 дБ). Штриховые линии с точками показывают линейность для случая, когда размах выходного сигнала составляет 30% (верхняя линия) и 50% (нижняя линия) от полного размаха отклика напряжения би-сквида при оптимальной величине i_{c3} .

3. Аналитическая теория

Для построения аналитической теории би-сквида целесообразно использовать нормированные величины тока $i = I/I_C$, напряжения $v = V/V_C$, индуктивности $l = 2\pi LI_C/\Phi_0$, приложенного внешнего магнитного потока $\varphi_e = 2\pi\Phi/\Phi_0$ и времени $\tau = t \cdot \Omega_C$, где $I_C, V_C = I_C \cdot R_N$ и R_N – соответственно критический ток, характерное напряжение и нормальное сопротивление двух основных (одинаковых) джозефсоновских переходов, $\Omega_C = 2\pi V_C/\Phi_0$ – характерная джозефсоновская частота. Нормированная величина критического тока третьего джозефсоновского перехода $i_{c3} = I_3/I_C$. На рис. 8а показана принципиальная схема би-сквида с обозначением токов, протекающих через разные участки этой схемы. Приложение внешнего магнитного потока Φ_e в этой схеме отисывается генератором Р фазы φ_e . Без потери общности можно

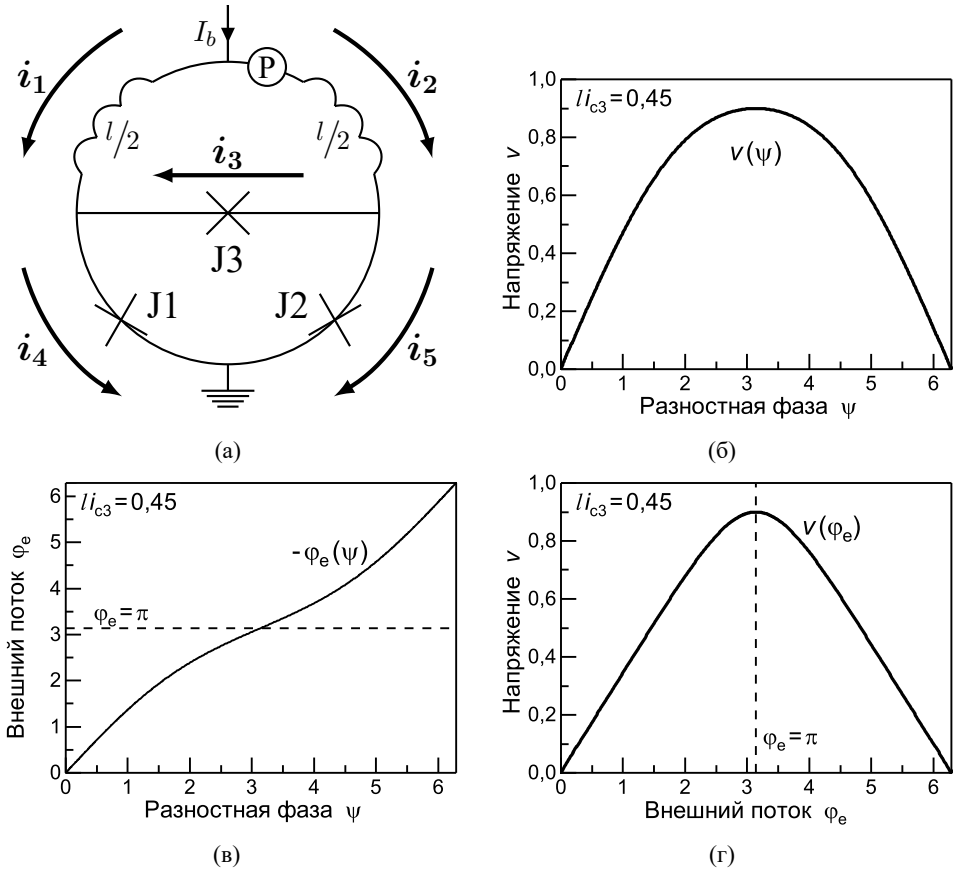


Рис. 8. (а) Схема би-скивида, представляющего собой гальваническое соединение одноконтактного и двухконтактного интерферометров. Контур одноконтактного скивида играет роль нелинейного трансформатора магнитного потока, линеаризующего отклик напряжения двухконтактного интерферометра. (б) Зависимость среднего напряжения на би-скивиде от средней разностной джозефсоновской фазы переходов контура двухконтактного интерферометра - решение уравнения (11). (в) Связь между величиной внешнего магнитного потока и величиной средней разностной джозефсоновской фазы переходов контура двухконтактного скивида - решение уравнения (15). (г) Зависимость среднего напряжения на би-скивиде от внешнего магнитного потока – решение системы уравнений (11)-(15).

рассматривать симметричную схему, в которой точки подключения источника тока смещения i_b делят основную геометрическую индуктивность l на два равных плеча. Используя описание джозефсоновских переходов в рамках резистивной модели с пренебрежимо малой емкостью, условия баланса токов и фаз в рассматриваемой схеме дают следующую систему уравнений:

$$i_b = i_1 + i_2, \quad i_1 + i_3 = i_4, \quad i_2 = i_3 + i_5, \quad (2a)$$

$$i_4 = \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1, \quad i_5 = \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_2, \quad (2б)$$

$$i_3 = \sin \varphi_3 + \dot{\varphi}_3, \quad (2в)$$

$$\varphi_1 + \frac{l}{2} i_1 = \varphi_2 + \frac{l}{2} i_2 - \varphi_e, \quad (2г)$$

$$\varphi_1 + \varphi_3 = \varphi_2, \quad (2д)$$

и, следовательно,

$$\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}_2. \quad (2е)$$

Данные выражения могут быть легко сведены к следующей системе двух уравнений:

$$2\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 = \frac{i_b}{2} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_e}{l} + i_{c3} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \sin \varphi_1, \quad (3a)$$

$$2\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1 = \frac{i_b}{2} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_e}{l} + i_{c3} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \sin \varphi_2. \quad (3б)$$

Для дальнейшего анализа удобно перейти в этих выражениях от фаз джозефсоновских переходов к суммарной и разностной фазам: $\theta = \varphi_2 + \varphi_1$ и $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$. В новых переменных система уравнений (3a)-(3б) принимает вид (пу-

тем сложения (3а) и (3б) и их вычитания):

$$\dot{\theta} = i_b - 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2}, \quad (4)$$

$$-3\dot{\varphi} = -2 \frac{\psi - \varphi_e}{l} - 2i_{c3} \sin \psi - 2 \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2}. \quad (5)$$

В резистивном состоянии суммарная фаза $\theta(\tau)$ неограниченно растет во времени, в то время как разностная фаза ψ всегда ограничена и может быть представлена в виде суммы медленно меняющейся (сигнальной) части $\bar{\psi}$ зависящей от внешнего магнитного потока φ_e , и быстро меняющейся части $\tilde{\psi}$:

$$\psi(\tau) = \bar{\psi}(\varphi_e) + \tilde{\psi}(\tau). \quad (6)$$

Дальнейшее аналитическое рассмотрение возможно, если сделать предположение о малости быстроменяющейся части:

$$|\tilde{\psi}(\tau)| \ll 1. \quad (7)$$

В данном приближении уравнение (4) эквивалентно уравнению для одиночного джозефсоновского перехода с критическим током $i_c = \cos(\psi_0/2)$ и током смещения $i = i_b/2$:

$$\frac{\dot{\theta}}{2} = \frac{i_b}{2} - \left(\cos \frac{\bar{\psi}}{2} \right) \cdot \sin \frac{\theta}{2}. \quad (8)$$

Это уравнение интегрируется и имеет следующее решение:

$$\theta(t) = 4 \left[\arctg \left(\frac{\sqrt{i_b^2 - 4 \cos^2 \left(\frac{\psi_0}{2} \right)}}{i_b} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{i_b^2 - 4 \cos^2 \left(\frac{\psi_0}{2} \right)}}{i_b} t \right) + \frac{2}{i_b} \cos \left(\frac{\psi_0}{2} \right) \right] + \pi n, \quad (9)$$

где n – целое число, которое периодически увеличивается на 1 в тот момент времени, когда функция arctg претерпевает скачок от значения $\pi/2$ до $-\pi/2$. В результате этого получаем нарастающую функцию, которая представляет собой сумму линейно нарастающей функции и осциллирующей функции с периодом:

$$T = \pi \cdot \frac{4}{\sqrt{i_b^2 - \cos^2\left(\frac{\psi_0}{2}\right)}}. \quad (10)$$

Постоянная составляющая напряжения на би-сквиде есть среднее значение полусуммы фаз джозефсоновских переходов:

$$v = \frac{1}{2} \langle \dot{\theta} \rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_0^T \dot{\theta} dt}{T} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta|_0^T}{T} = \frac{4\pi}{2T}. \quad (11)$$

С учетом формулы (10), получаем следующее уравнение для постоянной составляющей напряжения:

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{i_b^2 - 4 \cos^2\left(\frac{\psi_0}{2}\right)}. \quad (12)$$

Используя условие (7) и усредняя выражение (5) по времени, получаем выражение:

$$0 = -\frac{2(\bar{\psi} - \varphi_e)}{l} - 2i_{c3} \sin(\bar{\psi}) - 2 \sin\left(\frac{\bar{\psi}}{2}\right) \left\langle \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\rangle, \quad (13)$$

в котором величина $\left\langle \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\rangle$ равна нулю. Действительно, используя полученное выше уравнение (4), можно проделать следующие преобразования:

$$\left\langle \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \cos \frac{\theta}{2} \frac{d\tau}{d\theta} d\theta = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \cos \frac{\theta}{2} \frac{d\theta}{i_b - 2 \cos\left(\frac{\psi_0}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{T \cos\left(\frac{\psi_0}{2}\right)} \ln \left(\left| i_b - 2 \cos\left(\frac{\psi_0}{2}\right) \sin\frac{\theta}{2} \right| \right) \Big|_0^{2\pi} = 0. \quad (14)$$

Таким образом, из выражения (11) следует «фазовое уравнение»

$$\psi_0 = \varphi_e - li_{c3} \sin(\bar{\psi}), \quad (15)$$

определяющее в неявном виде функцию $\bar{\psi}(\varphi_e)$. Это уравнение совпадает с уравнением для одноконтантного интерферометра с эффективным значением нормированной индуктивности $l^* = i_{c3}l$. Система двух полученных уравнений (11) и (15) дает отклик би-сквида $v(\varphi_e)$. Уравнение (11) дает зависимость постоянной составляющей напряжения от разности фаз ψ_0 , которая показана на рис. 8б. Уравнение (15) устанавливает нелинейную связь между φ_e и ψ_0 (рис. 8в), степень нелинейности которой, определяется величиной параметра l^* . При оптимальной величине $l^* \sim 1$ отклик напряжения приближается к треугольному виду (рис. 8г); превышение оптимально значения приводит к появлению гистерезиса в верхней части отклика, а при малой $l^* \ll 1$ форма отклика повторяет показанную на рис. 8б зависимость $v(\bar{\psi})$.

Несмотря на то, что уравнения (11) и (15) носят приближенный характер, поскольку были получены в предположении малости быстроменяющейся части разностной фазы (6), они дают достаточно адекватное описание вольт-полевых характеристик (откликов напряжения) би-сквида, качественно хорошо согласующееся с результатами численного моделирования. На рис. 9 показаны результаты численного моделирования преобразования магнитного потока Φ_e в сигнальную составляющую разностной фазы $\bar{\psi}$ в би-сквиде, находящемся в резистивном состоянии, и, для сравнения, в двух-контантном сквиде. В би-сквиде это преобразование имеет сильно нелинейный вид и достаточно близко к (15), в то время как в двух-контантном интерферометре $\bar{\psi} = 2\pi\Phi_e/\Phi_0$.

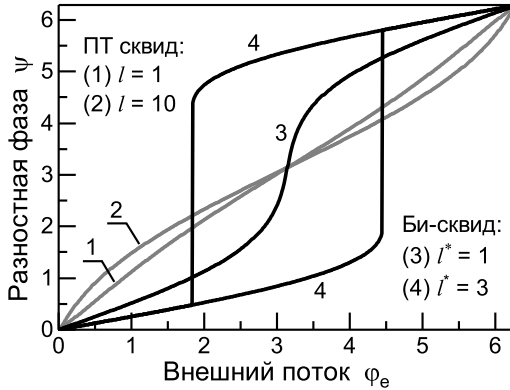


Рис. 9. Преобразование приложенного магнитного потока Φ_e в сигнальную составляющую разностной фазы $\bar{\psi} = (\varphi_2 - \varphi_1)$ в двух-контактном сквиде с нормированной индуктивностью $l = 1$ («1») и $l = 10$ («2») в резистивном состоянии и би-сквиде в резистивном состоянии с индуктивным параметром $l^* \equiv l \cdot i_{c3} = 1$ («3») и $l^* = 3$ («4»).

4. Учет влияния джозефсоновской генерации

В следующем приближении необходимо учитывать влияние джозефсоновской генерации на преобразование приложенного магнитного потока в фазу третьего джозефсоновского перехода, которое в первом приближении дается уравнением (15).

Быстроменяющуюся часть разностной фазы (она же фаза третьего джозефсоновского перехода) можно записать в виде ряда Фурье:

$$\tilde{\psi}(\tau) \equiv \tilde{\psi}_3(\tau) = b_1 \sin(\omega_j \tau) + b_2 \sin(2\omega_j \tau + \xi_2) + \sin(3\omega_j \tau + \xi_3) + \dots \quad (16)$$

Далее можно воспользоваться следующей формулой разложения по функциям Бесселя:

$$\sin(\xi + x \sin(\omega t)) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(x) \sin(\xi + n\omega t). \quad (17)$$

Учитывая в выражении для быстроменяющейся части разностной фазы только основной тон, выражение для «сигнального» тока через третий джозефсоновский переход приобретает вид

$$i_{c3} \sin [\psi_0 + b_1 \sin (\omega t)] = i_{c3} J_0 (b_1) \sin (\psi_0) . \quad (18)$$

Таким образом, преобразование приложенного магнитного потока в медленно-меняющуюся (на сигнальной частоте) фазу третьего джозефсоновского перехода можно описывать по-прежнему уравнением (15), но с использованием вместо l^* эффективного значения этого параметра:

$$l_{eff}^* = l^* J_0 (b_1) \approx l^* (1 - b_1^2/4) . \quad (19a)$$

Легко показать, что учет малых высших гармоник дает более общее выражение:

$$l_{eff}^* = l^* J_0 (b_1) J_0 (b_2) J_0 (b_3) \dots J_0 (b_n) \quad (19b)$$

Усредненная величина квадрата быстроменяющейся части фазы третьего джозефсоновского перехода $\overline{(\tilde{\varphi}_3(\tau))^2} = \overline{\varphi_3^2} - (\overline{\varphi_3})^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots) = g^2/2$ может быть вычислена с использованием численного моделирования. При этом $g \approx b_1$, если $\max \{b_k\} < b_1/2$, при $k > 1$.

На рис. 10 показаны рассчитанные значения g и $J_0(g)$ как функции приложенного магнитного потока Φ_e для би-сквида (сплошные линии) при $l^* = 1$ и $l = 0,5; 1; 2$, а также и двух-контактного сквида (штриховые линии) при тех же значениях нормированной индуктивности $l = 0,5; 1; 2$. Эти результаты показывают, что величина эффективного параметра l_{eff}^* уменьшается по мере приближения приложенного магнитного потока к $\Phi_0/2$. Этот эффект усиливается с увеличением нормированной индуктивности l . В качестве очевидного примера влияния уменьшения l_{eff}^* в окрестности $\varphi_e \cong \pi$ можно указать на вид рассчитанной численно зависимости $\overline{\psi}(\varphi_e)$, которая при $l^* = 1$ имеет конеч-

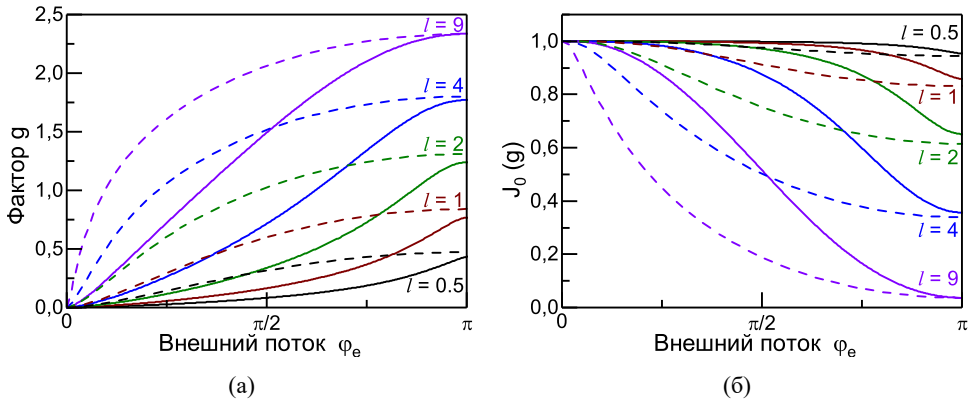


Рис. 10. Значения (а) g и (б) $J_0(g)$ как функции приложенного магнитного потока Φ_e для би-сквида (сплошные линии) при $l^* = 1$ и $l = 0,5; 1; 2$, а также для двух-контактного сквида (штриховые линии) при тех же значениях нормированной индуктивности $l = 0,5; 1; 2$.

ный наклон в точке $\varphi_e = \pi$ (график «3» на рис. 9) вместо бесконечно большой величины производной, как следует из (15).

Таким образом, существование пульсирующей (на частоте джозефсоновской генерации) компоненты разностной джозефсоновской фазы может оказывать достаточно заметное влияние на форму нелинейного преобразования магнитного потока в сигнальную компоненту джозефсоновской фазы. Кроме того, в силу отличия пульсирующей компоненты разностной фазы в би-сквида от ее величины в двух-контактном сквида, нелинейное преобразование разностной фазы в напряжение также оказывается чувствительным к величине этой компоненты. Поэтому для точного анализа и определения условий достижения наиболее высокой линейности отклика напряжения би-сквида необходимо использовать численное моделирование.

5. Влияние общей части индуктивностей контуров

В реальном би-сквиде всегда будет присутствовать некоторая конечная индуктивность трехконтактного контура L_{dc} (величиной которой пренебрегались в аналитической теории), а также, возможно существование небольшой индуктивности L_m , общей для обоих контуров би-сквида, как показано схематически на рис. 11.

Точный численный анализ показывает, что при небольших значениях нормированных величин этих индуктивностей $l_{dc} = 2\pi L_{dc} I_c / \Phi_0$ и $l_m = 2\pi L_m I_c / \Phi_0$, когда $l_{dc} \leq 0,5 \dots 1$ и $l_m \leq (0,1 \dots 0,2) l_{dc}$, достижимая линейность сохраняется, но при этом изменяется оптимальная величина параметра i_{c3} . Более того, присутствие небольшой индуктивности l_m расширяет область допустимых отклонений всех параметров для заданной линейности. Однако, при дальнейшем увеличении индуктивностей l_{dc} и l_m достижимая линейность падает [8].

Линейность отклика напряжения би-сквида может достигать $90 \dots 100$ дБ, но для этого требуется высокая точность задания всех параметров. Так, на рис. 12 показаны области на плоскости параметров $l_m - i_{c3}$, внутри которых линейность не менее 90 дБ (области, ограниченные сплошными линиями) и

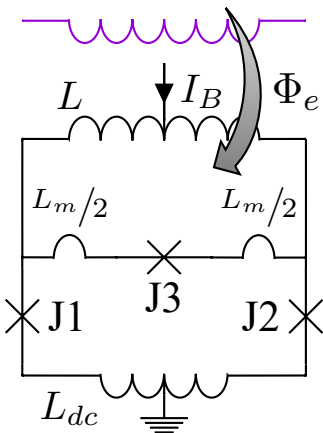


Рис. 11. Эквивалентная схема би-сквида с учетом существования индуктивности трехконтактного контура L_{dc} и общей части индуктивностей контуров L_m .

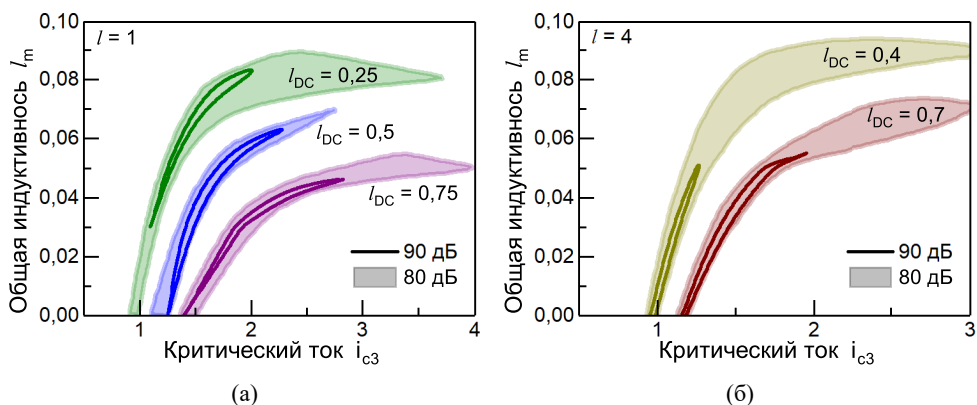


Рис. 12. Области на плоскости параметров $l_m - i_{c3}$, внутри которых линейность отклика напряжения би-сквида не менее 90 дБ (области, ограниченные сплошными линиями) и не менее 80 дБ (закрашенные области) при различных значениях l_{dc} в случаях, когда нормированная величина основной индуктивности $l = 1$ (а) и $l = 4$ (б). Линейность вычислялась для случая, когда размах выходного сигнала составляет 30% от полного размаха отклика напряжения би-сквида.

не менее 80 дБ (закрашенные области) при различных значениях l_{dc} , в случаях, когда нормированная величина основной индуктивности $l = 1$ (рис. 12а) и $l = 4$ (рис. 12б). Видно, что достижение таких высоких значений линейности требует очень точного расчета и реализации значений всех индуктивных параметров и параметра i_{c3} . В то же время, эти области допустимых значений параметров быстро расширяются при уменьшении требуемой линейности отклика напряжения би-сквида.

На рис. 13 показаны области на плоскости параметров $l_m - i_{c3}$, внутри которых линейность отклика напряжения не менее 60 дБ, в случаях, когда нормированная величина основной индуктивности $l = 1$ (рис. 13а) и $l = 4$ (рис. 13б). Эти широкие области параметров l_m и i_{c3} , соответствующие разным значениям l_{dc} , сильно пересекаются друг с другом, что определяет достаточно широкий допустимый диапазон значений также и для параметра l_{dc} .

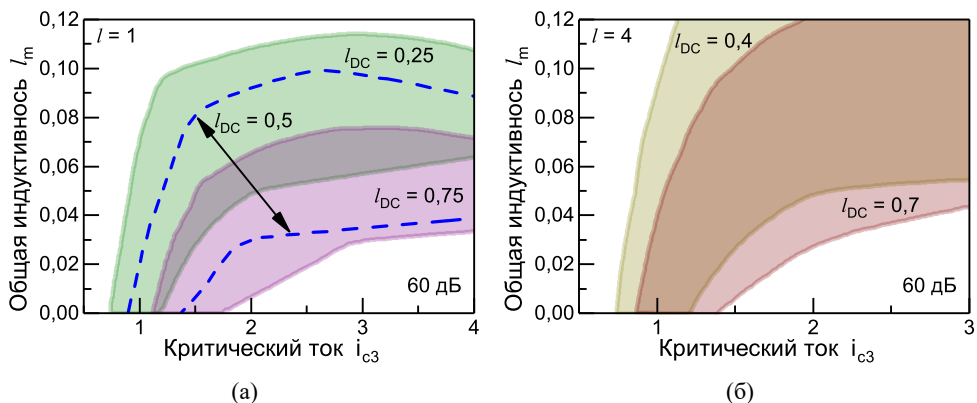


Рис. 13. Области на плоскости параметров $l_m - i_{c3}$, внутри которых линейность отклика напряжения би-сквида не менее 60 дБ при различных значениях l_{dc} (сильно наложенные друг на друга закрашенные области, а также область, ограниченная штриховыми линиями), в случаях, когда нормированная величина основной индуктивности $l = 1$ (а) и $l = 4$ (б). Линейность вычислялась для случая, когда размах выходного сигнала составляет 30% от полного размаха отклика напряжения би-сквида.

Поскольку все параметры, отвечающие за линейность отклика напряжения, фиксируются в процессе изготовления би-сквида и не могут быть в дальнейшем изменены для достижения максимально возможной линейности, следует рассматривать би-сквиды как практические устройства с реально достижимой линейностью на уровне 60...70 дБ, которая вполне достаточна для многих важных применений. Действительно, если $Lin \geq 60$ дБ, амплитуда наибольшей гармоники в составе выходного сигнала не превышает одной тысячной от амплитуды основного тона.

6. Динамический диапазон линейного преобразования

Динамический диапазон DR, как таковой, определяется как отношение (обычно в дБ) амплитуды A_{max} (или мощности P_{max}) максимально возможного (максимально допустимого) сигнала к амплитуде A_{min} (мощности P_{min}) мини-

мально возможного сигнала на выходе устройства или как отношение соответствующих величин на его входе:

$$DR = 20 \lg (A_{\max}/A_{\min}) = 10 \lg (P_{\max}/P_{\min}) . \quad (20)$$

Минимальная величина выходного сигнала любого устройства и, следовательно, минимальное значение входного сигнала (обнаружимого сигнала) определяются уровнем шумов на выходе этого устройства. Максимальная величина входного сигнала определяется условием достижения определенных ограничений на величину выходного сигнала (например, достижением определенной величины отклонения, обычно 1 дБ, выходного сигнала от линейного закона нарастания или просто достижением максимально-возможных значений выходного напряжения).

Во многих устройствах, особенно в случае широкополосных систем, реализация относительно широкой полосы частот предполагает присутствие в ее пределах многих независимых сигналов с частотами F_k и различными амплитудами в пределах динамического диапазона. Возникающие за счет нелинейных свойств системы новые сигналы (в пределах этой полосы) на комбинационных частотах $nF_k \pm mF_l$ (интермодуляционные искажения), где $n, m = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3 \dots$, будут накладываться на принимаемые сигналы и искажать их или создавать новые, ложные, сигналы. Поэтому, для таких систем крайне важной характеристикой является *динамический диапазон линейного преобразования* (или *динамический диапазон, свободный от нелинейных искажений*; англ. *SFDR – Spurious Free Dynamic Range*) [9–11].

SFDR может быть определен с помощью тех же формул (1а) или (1б), что и линейность (используя одно- или двух-тоновый методы анализа), но при условии, что наибольшая амплитуда гармоники a_k или комбинационной компоненты a_{nm} только достигает границы различимости сигнала на уровне шумов, то есть чувствительности этого устройства. Таким образом, чем ниже уровень шумов устройства, тем выше требования к малости интермодуляционных ис-

кажений на участке $\Delta V = 2a_1$ отклика напряжения би-сквида, соответствующего размаху максимального сигнала в пределах SFDR. Поскольку уровень шумов зависит от выходной полосы устройства и может быть изменен с использованием дополнительного фильтрования сигнала, линейность характеристик устройства (в би-сквиде - линейность преобразования магнитного потока в напряжение) играет основополагающую роль в формировании величины SFDR.

В би-сквиде источником шумов являются джозефсоновские переходы, главным образом, два основных перехода J1 и J2, находящиеся в резистивном состоянии. Тепловые шумы, создаваемые нормальными сопротивлениями R_N джозефсоновских переходов, можно описать по методу Ланжевена, полагая резисторы идеальными (нешумящими) и подключая параллельно каждому из них независимые источники флуктуационных токов со спектральной плотностью

$$S_I(\Omega) = (2/\pi) k_B T / R_N, \quad (21)$$

где T – физическая температура, k_B – постоянная Больцмана. В этом случае спектральную плотность напряжения на би-сквиде можно записать в виде:

$$S_V(\Omega) = R_d^2 \cdot 2S_I(\Omega), \quad (22)$$

где $R_d = dV/dI_b$ – дифференциальное сопротивление (наклон касательно в рассматриваемой точке ВАХ). В середине линейной части отклика напряжения би-сквида ($\Phi_e \simeq \Phi_0/4$) величину дифференциального сопротивления можно оценить как $R_d \approx 2 \cdot R_N/2 \simeq R_N$. Таким образом, средне-квадратичная величина шумов выходного напряжения би-сквида может быть записана в виде

$$\langle V_f \rangle \simeq \sqrt{8k_B T R_N \Delta F} \quad (23)$$

где ΔF – полоса частот данного устройства (может быть задана фильтром, подключенным к выходу би-сквида).

Размах отклика би-сквида ограничен величиной характерного напряжения джозефсоновских переходов $V_c = 2\pi I_c R_N / \Phi_0$ и, согласно расчету откликов, показанных на рис. 5б, составляет от $0,8V_c$ до $0,6V_c$ соответственно для треугольного и гистерезисного видов отклика. Если учесть закругление на верхних частях гистерезисного отклика, а также существование размытия (закругления) нижних углов отклика под действием тепловых флуктуаций (такое размытие отсутствует на откликах на рис. 5б, т.к. они рассчитаны без учета флуктуаций) [7], то вполне обоснованно оценить величину максимального допустимого размаха выходного напряжения $\Delta V \simeq 2a_1$ в режиме высоко-линейного преобразования как $\sim 50\%$ (или даже $\sim 30\%$) размаха отклика напряжения, то есть именно так, как это было сделано выше при анализе линейности отклика напряжения би-сквида (т.е. $a_1 \approx 0,1V_c \dots 0,2V_c$). В этом случае линейность Lin отклика напряжения будет соответствовать максимальной величине динамического диапазона, свободного от нелинейных искажений, SFDR, достигаемого при $\langle V_f \rangle \simeq \max \{a_{nm}\}$ или $\langle V_f \rangle \simeq \max \{a_k\}$ (соответственно в двух- и одно-тоновом методах анализа).

Сделаем оценку величины $\langle V_f \rangle$ и SFDR при использовании ниобиевой пленочной технологии изготовления интегральных сверхпроводниковых схем. В рамках этой технологии, джозефсоновские переходы представляют собой туннельные джозефсоновские структуры, шунтированные в процессе изготовления пленочными резисторами для уменьшения влияния емкости C туннельных структур с целью получения безгистерезисной вольт-амперной характеристики (ВАХ), когда параметр Маккамбера $\beta = 2\pi I_c R_N^2 C / \Phi_0 < 1$. В таких джозефсоновских переходах сопротивление шунта выполняет роль нормального сопротивления R_N . Поскольку присутствие емкости C перехода ухудшает линейность отклика напряжения би-сквида, величина R_N , как показывают расчеты, должна быть дополнительно уменьшена, чтобы понизить параметра Маккамбера до значения $\beta \simeq 0,2$, начиная с которого влиянием емкости можно пренебречь.

Выбирая наиболее оптимальное значение критического тока основных джозефсоновских переходов $I_c \simeq 125 \mu\text{A}$ (для уменьшения фактора шума $\gamma = (2\pi/\Phi_0) k_B T / I_c$ до $\sim 2 \cdot 10^{-3}$ с целью минимизации размытия углов отклика напряжения [7]) и ориентируясь на ниобиевый процесс с плотностью критического тока $45 \mu\text{A}/\mu\text{m}^2$ и емкостью $59 \text{ фФ}/\mu\text{m}^2$ [12], находим необходимую величину резистивного шунта $R_s = R_N \simeq 1,7 \text{ Ом}$ и соответственно величину характерного напряжения $V_c \equiv I_c R_N \simeq 220 \mu\text{В}$. Используя эти данные, находим, что для выполнения условия $\text{SFDR} = \text{Lin} = 60 \text{ дБ}$, при максимальной величине амплитуды выходного сигнала $a_1 \approx 0,15V_c \dots 0,25V_c$ необходима соответственно полоса частот $\Delta F \simeq 0,6 \dots 2,4 \text{ МГц}$. При такой ширине частотной полосы нелинейные искажения принимаемых сигналов (амплитуды возникающих интермодуляционных компонент) не будут превышать среднеквадратичного значения уровня шумов вплоть до величины входных сигналов на три порядка выше, чем порог регистрируемого сигнала.

По своим физическим принципам би-сквид является очень широкополосным устройством – частота принимаемых сигналов может достигать нескольких гигагерц и даже десятков гигагерц. Поэтому такое устройство может быть использовано для одновременного приема большого числа сигналов в пределах очень широкой полосы частот и последующей параллельной фильтрации всех принятых сигналов посредством выделения более узких полос для которых выполняется оптимальное условие $\text{SFDR} = \text{Lin} = 60 \dots 70 \text{ дБ}$.

Список литературы

- [1] *Clarke J., Braginski A.* The SQUID Handbook: Fundamentals and Technology of SQUIDs and SQUID Systems. — Wiley, 2006. — Vol. 1. — ISBN: 978-3-527-60458-6.
- [2] *Kleiner R., Koelle D., Ludwig F., Clarke J.* Superconducting quantum interference devices: State of the art and applications // Proceedings of the IEEE. — 2004. — Vol. 92, no. 10. — pp. 1534–1548. doi:10.1109/JPROC.2004.833655.

- [3] Applied Superconductivity: Handbook on Devices and Applications / Ed. by Paul Seidel. Encyclopedia of Applied Physics. — Wiley VCH Verlag GmbH, 2015. — ISBN: 978-3-527412-09-9.
- [4] *Kornev V. K., Soloviev I. I., Klenov N. V., Mukhanov O. A.* Bi-SQUID: a novel linearization method for dc SQUID voltage response // Superconductor Science and Technology. — 2009. — Vol. 22, no. 11. — p. 114011. doi:10.1088/0953-2048/22/11/114011.
- [5] *Kornev V. K., Sharafiev A. V., Soloviev I. I., Mukhanov O. A.* Signal and noise characteristics of bi-SQUID // Superconductor Science and Technology. — 2014. — Vol. 27, no. 11. — p. 115009. doi:10.1088/0953-2048/27/11/115009.
- [6] *Kornev V. K., Kolotinskiy N. V., Bazulin D. E., Mukhanov O. A.* High-Inductance Bi-SQUID // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. — 2017. — Vol. 27, no. 4. — p. 1601304. doi:10.1109/TASC.2016.2631427.
- [7] *Kornev V. K., Kolotinskiy N. V., Levochkina A. Y., Mukhanov O. A.* Critical Current Spread and Thermal Noise in Bi-SQUID Cells and Arrays // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. — 2017. — Vol. 27, no. 4. — p. 1601005. doi:10.1109/tasc.2016.2632125.
- [8] *Kornev V. K., Kolotinskiy N. V., Bazulin D. E., Mukhanov O. A.* High-Linearity Bi-SQUID: Design Map // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. — 2018. — Vol. 28, no. 7. — p. 1601905. doi:10.1109/tasc.2018.2827982.
- [9] *Egan W. F.* Practical RF System Design. — New York : Wiley, 2003. — ISBN: 978-0-471-20023-9.
- [10] *Razavi B.* RF Microelectronics. — London : Pearson Education, 2011. — ISBN: 978-0-137-13473-8.
- [11] *Lerdworatawee J., Namgoong W.* Revisiting spurious-free dynamic range of communication receivers // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. — 2006. — Vol. 53, no. 4. — pp. 937–943. doi:10.1109/tcsi.2005.861891.
- [12] HYPRES Design Rules, HYPRES. — 2013. — URL: <http://www.hypres.com/foundry/niobium-process/>.

Учебное издание

Корнев Виктор Константинович
Колотинский Николай Васильевич

БИ-СКВИД: ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Учебное пособие

Оригинал-макет подготовлен авторами

Подписано в печать 04.06.2019. Печ. лист. 1,62.

Тираж 50 экз. Заказ № 89.

Издательство: Издательский отдел Физического факультета
МГУ, 119234, г. Москва, Ленинский горы, д. 1, стр. 2,
тел. 8 (495) 939-54-94.

Отпечатано в Отделе оперативной печати Физического
факультета МГУ